D-MATH
Prof. Richard Pink

Algebra I

HS 2022

Serie 6

Ringe, Homomorphismen, Unterringe, Produkte

1. In jedem Ring R wird das additive Inverse eines Elements x mit $-x$ bezeichnet. Zeige nur mittels der Ringaxiome die folgenden Grundregeln für alle $x, y, z \in R$:

   (a) $0 \cdot x = 0$.

   (b) $(-1) \cdot x = -x$.

   (c) $-xy = (-x)y$.

   (d) $(x - y)z = xz - yz$.

2. Zeige, dass ein Ringhomomorphismus $\psi : R \to S$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er bijektiv ist.

3. Welche der Unterringe

$$\mathbb{Z}[i, \tfrac{1}{5}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{i}{25}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{4i}{5}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{4i}{5}, 4 + 3i]$$

   von $\mathbb{C}$ sind gleich?

4. Zeige, dass jeder endlich erzeugte unitäre Unterring von $\mathbb{Q}$ die Form $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ für ein $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ hat. Folgere daraus, dass $\mathbb{Q}$ als Ring über $\mathbb{Z}$ nicht endlich erzeugt ist.

*5. Zeige, dass die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times \subset \mathbb{R}$ unendlich ist, und bestimme sie.

6. Ein Element e eines Rings R mit $e^2 = e$ heisst *idempotent*. Zeige:

   (a) Für jedes Idempotente e ist $e' := 1 - e$ idempotent und es gilt $ee' = e'e = 0$.

   (b) Die Zerlegungen von R in ein Produkt $S \times T$ von Ringen S und T entsprechen eineindeutig den Darstellungen $1 = e + e'$ mit Idempotenten e und e'.

   Hinweis: Die Faktoren S und T entsprechen den Teilmengen Re und Re'. Diese sind aber im Allgemeinen keine Unterringe, weil sie das Einselement nicht enthalten.

7. Vereinfache die folgenden Ausdrücke im Polynomring $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ für jede natürliche Zahl d, wobei in der Summe jeweils $i, j, k \geqslant 0$ sind:

   (a) $(X - Y) \cdot \sum_{i+j=d} X^i Y^j$.

   (b) $(X - Y)(X - Z)(Y - Z) \cdot \sum_{i+j+k=d} X^i Y^j Z^k$.