Serie 7

Polynomringe, Matrizen, Integritätsbereiche

*1. Zeige mit der universellen Eigenschaft von Polynomringen für jedes $1 \leqslant m \leqslant n$ die Isomorphie

$$R[X_1, ..., X_n] \;\cong\; R[X_1, ..., X_m][X_{m+1}, ..., X_n].$$

2. (a) Verifiziere die Ringaxiome für Ring $R[[X]]$ der *formalen Potenzreihen* in einer Variable über einem Ring R.
   (b) Zeige, dass ein Element $a_0 + \sum_{i>0} a_i X^i \in R[[X]]$ genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \in R$ eine Einheit ist.

3. Sei $K[X]$ der Polynomring in einer Variablen X über einem Körper K. Betrachte einen Ringautomorphismus $\sigma : K[X] \to K[X]$, dessen Einschränkung auf K die Identität ist. (Mit anderen Worten ist σ ein *Automorphismus von K-Algebren.*) Zeige, dass es Elemente $a_1 \in K^\times$ und $a_0 \in K$ gibt, so dass $\sigma(X) = a_1 X + a_0$ ist.

4. Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass jede quadratische Matrix über einem Ring Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms ist. Beweise dies wie folgt:
   (a) Für obere Dreiecksmatrizen durch Induktion über die Grösse der Matrix.
   (b) Für alle quadratischen Matrizen über $\mathbb{C}$.
   (c) Im allgemeinen Fall analog zu Meta-Proposition 2.6.1 der Vorlesung.

5. (a) Zeige: Für jeden Integritätsbereich R gilt $(R[X])^\times = R^\times$.
   (b) Finde einen Ring R mit $(R[X])^\times \neq R^\times$.

6. (a) Zeige: Jeder Unterring $R \subset \mathbb{C}$, der ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist, ist ein Körper.
   (*Hinweis:* Für jedes $f \in R \smallsetminus \{0\}$ untersuche die Abbildung $R \to R,\ g \mapsto gf$.)
   (b) Zeige: Für jedes $n > 0$ ist

$$\mathbb{Q}[\sqrt[n]{2}] \;=\; \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\sqrt[n]{2})^i \;\middle|\; \forall i\colon a_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

   Folgere, dass $\mathbb{Q}[\sqrt[n]{2}]$ ein Körper ist.
   (c) Bestimme das inverse Element $\big(1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\big)^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ in der Darstellung $a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2\sqrt[3]{4}$ für $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$.