Serie 8

Quotientenkörper, Ideale, Primideale

1. Seien K ein Körper und $K((X))$ die Menge aller beidseitig unendlichen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in K, für die ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ existiert mit $a_n = 0$ für alle $n < n_0$. Diese Folgen schreiben wir als *formale Laurentreihen mit endlichem Hauptteil* $\sum_n' a_n X^n$.

   (a) Definiere Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $K((X))$ in Analogie zu $K[[X]]$ und zeige, dass damit $K((X))$ ein Körper ist.

   (b) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Quot}(K[[X]]) \cong K((X))$.

*2. Sei S die Menge aller Funktionen $\mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ für alle Teilmengen $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus \mathrm{dom}(f)| < \infty$, so dass $u, v \in \mathbb{R}[X]$ existieren mit der Eigenschaft

$$\forall\, x \in \mathrm{dom}(f)\colon\; v(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(x) = \tfrac{u(x)}{v(x)}.$$

Wir nennen zwei Funktionen $f, g \in S$ *äquivalent*, wenn ihre Werte auf einer geeigneten Teilmenge $X \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$ übereinstimmen.

   (a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf S ist. Sei K die Menge ihrer Äquivalenzklassen.

   (b) Definiere Operationen $+$ und $\cdot$ auf K sowie Elemente $0, 1 \in K$ und zeige, dass das Tupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist.

   (c) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} K$.

In diesem Sinn ist es einigermassen berechtigt, die Elemente von $\mathbb{R}(X)$ *rationale Funktionen* zu nennen.

3. Zeige für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und alle Elemente x, y eines Rings R die Formeln

   (a) $(x)(y) = (xy)$

   (b) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$

   (c) $(x) \cdot ((y) \cdot \mathfrak{a}) = (xy) \cdot \mathfrak{a}$

4. Entscheide, welche der folgenden Ideale von $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$ gleich sind:

$$\begin{aligned} I_1 &:= (X,Y) & \qquad I_5 &:= (XZ, X-Y, X+Y) \\ I_2 &:= (X,Y,Z) & I_6 &:= (X^2+Y^2, Z-Y^2, Z-X^2) \\ I_3 &:= (X^2,Y^2,Z) & I_7 &:= (XZ, Y^2-5X^2, X^2-XZ) \\ I_4 &:= (XZ, X^2, Y^2) \end{aligned}$$

5. Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heisst *nilpotent*, falls ein $n \geqslant 1$ mit $x^n = 0$ existiert. Beweise oder widerlege:

   (a) Die Menge der Nullteiler von R zusammen mit 0 ist ein Ideal von R.

   (b) Die Menge I der nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal von R.

   (c) Für I in (b) enthält der Faktorring R/I ausser 0 keine nilpotenten Elemente.

6. Betrachte einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S$ und setze

$$\mathfrak{a} \;:=\; \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \;:=\; \{a \in R \mid \varphi(a) \in \mathfrak{b}\}.$$

   (a) Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R ist.

   (b) Zeige, dass φ einen injektiven Ringhomomorphismus $R/\mathfrak{a} \hookrightarrow S/\mathfrak{b}$ induziert.

   (c) Folgere: Ist $\mathfrak{b}$ ein Primideal, so ist auch $\mathfrak{a}$ ein Primideal.

7. Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuche, wann der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2-a)$ isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, beziehungsweise zu $\mathbb{C}$, beziehungsweise zu keinem der beiden ist.