Musterlösung Serie 8

QUOTIENTENKÖRPER, IDEALE, PRIMIDEALE

1. Seien K ein Körper und $K((X))$ die Menge aller beidseitig unendlichen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in K, für die ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ existiert mit $a_n = 0$ für alle $n < n_0$. Diese Folgen schreiben wir als *formale Laurentreihen mit endlichem Hauptteil* $\sum_n' a_n X^n$.

   (a) Definiere Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $K((X))$ in Analogie zu $K[[X]]$ und zeige, dass damit $K((X))$ ein Körper ist.

   (b) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Quot}(K[[X]]) \cong K((X))$.

   Lösung:

   (a) Die Operationen auf $K((X))$ definieren wir genauso wie auf Polynomen und auf formalen Potenzreihen:

$$\begin{aligned}(a_n)_n + (b_n)_n &:= (a_n + b_n)_n \\ (a_n)_n \cdot (b_n)_n &:= \big(\textstyle\sum_{i+j=n} a_i b_j\big)_n\end{aligned}$$

   Wir müssen aber überprüfen, dass dies wohldefiniert ist. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a_n = b_n = 0$ für alle $n < n_0$. Insbesondere ist dann auch $a_n + b_n = 0$ für alle $n < n_0$ und somit der erste Ausdruck wohldefiniert. Sodann kann das Produkt $a_i b_j$ nur dann ungleich Null sein, wenn $i, j \geqslant n_0$ ist. Für festes n mit $i + j = n$ impliziert dies $n_0 \leqslant i \leqslant n - n_0$; also gibt es dann nur endlich viele Möglichkeiten für (i, j) und die Summe in der Definition des Produkts ist endlich. Ausserdem kann die Summe nur dann ungleich Null sein, wenn $n = i + j \geqslant 2n_0$ ist. Daher liegt das Produkt wieder in der Menge $K((X))$ und die Operationen sind wohldefiniert.

   Wie bei formalen Potenzreihen prüft man nach, dass $K((X))$ mit diesen Operationen ein Ring ist mit demselben Null- und Einselement. Zudem können wir $K[[X]]$ mit dem Unterring von $K((X))$ aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $a_n = 0$ für $n < 0$ identifizieren. Darin gilt schon $1 \neq 0$.

   Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass jedes von Null verschiedene Element $f \in K((X))$ invertierbar ist. Schreibe ein solches in der Form $f = \sum_{n\geqslant n_0} a_n X^n$ mit $a_{n_0} \neq 0$. Dann ist $g := X^{-n_0} f = \sum_{n\geqslant 0} a_{n_0+n} X^n \in K[[X]]$ mit konstantem Koeffizienten $a_{n_0} \neq 0$. Nach Aufgabe 2 von Serie 7 ist dieses g in $K[[X]]$ invertierbar, es gibt also ein $h \in K[[X]]$ mit $hg = 1$. Damit ist $hX^{-n_0} f = hg = 1$, also ist f in $K((X))$ invertierbar mit $f^{-1} = hX^{-n_0}$.

(b) Wie oben erklärt ist $K[[X]]$ ein Unterring des Körpers $K((X))$. Nach der universellen Eigenschaft des Quotientenkörpers setzt sich der Inklusionshomomorphismus $K[[X]] \hookrightarrow K((X))$ fort zu einem Körperhomomorphismus $i : \mathrm{Quot}(K[[X]]) \to K((X))$. Dessen Bild ist der Unterkörper

$$\mathrm{Bild}(i) \;=\; \Big\{ \frac{g}{h} \;\Big|\; g, h \in K[[X]],\; h \neq 0 \Big\}.$$

In (a) haben wir aber festgestellt, dass sich jedes Element $f \in K((X))$ als $f = X^{n_0} g$ mit $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $g \in K[[X]]$ schreiben lässt. Im Fall $n_0 \geqslant 0$ liegt dieses f schon in $K[[X]]$ und daher in $\mathrm{Bild}(i)$. Andernfalls ist $-n_0 > 0$ und $f = \frac{g}{X^{-n_0}} \in \mathrm{Bild}(i)$. Insgesamt ist i daher surjektiv. Als Körperhomomorphismus ist i aber auch injektiv und somit ein Isomorphismus $\mathrm{Quot}(K[[X]]) \xrightarrow{\sim} K((X))$.

*2. Sei S die Menge aller Funktionen $\mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ für alle Teilmengen $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus \mathrm{dom}(f)| < \infty$, so dass $u, v \in \mathbb{R}[X]$ existieren mit der Eigenschaft

$$\forall\, x \in \mathrm{dom}(f)\colon\; v(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(x) = \tfrac{u(x)}{v(x)}.$$

Wir nennen zwei Funktionen $f, g \in S$ *äquivalent*, wenn ihre Werte auf einer geeigneten Teilmenge $X \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$ übereinstimmen.

(a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf S ist. Sei K die Menge ihrer Äquivalenzklassen.

(b) Definiere Operationen $+$ und $\cdot$ auf K sowie Elemente $0, 1 \in K$ und zeige, dass das Tupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist.

(c) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} K$.

In diesem Sinn ist es einigermassen berechtigt, die Elemente von $\mathbb{R}(X)$ *rationale Funktionen* zu nennen.

Lösung:

(a) That $\sim$ is symmetric and reflexive is clear. For transitivity, suppose that $f \sim g$ and $g \sim h$. Take subsets $X \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ and $Y \subset \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(h)$ with $|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$ and $|\mathbb{R} \smallsetminus Y| < \infty$, such that $f|_X = g|_X$ and $g|_Y = h|_Y$. Then $Z := X \cap Y \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h)$ with $|\mathbb{R} \smallsetminus Z| < \infty$ and $f|_Z = g|_Z = h|_Z$. Therefore $f \sim h$.

(b) For any $f,\, g \in S$ we define

$$\begin{aligned} f + g &: \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x), \\ f \cdot g &: \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

These functions again lie in S. Consider any $f, f', g, g' \in S$ with $f \sim f'$ and $g \sim g'$. Take subsets $X \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(f')$ and $Y \subset \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(g')$ with

$|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$ and $|\mathbb{R} \smallsetminus Y| < \infty$, such that $f|_X = f'|_X$ and $g|_Y = g'|_Y$. Then $Z := X \cap Y$ satisfies $|\mathbb{R} \smallsetminus Z| < \infty$, and we have $(f+g)|_Z = f|_Z + g|_Z = f'|_Z + g'|_Z = (f'+g')|_Z$ and likewise $(f \cdot g)|_Z = \ldots = (f' \cdot g')|_Z$. Therefore $f+g \sim f'+g'$ and $f \cdot g \sim f' \cdot g'$. Thus the operations yield well-defined maps

$$\begin{aligned} K \times K \to K, \quad ([f],[g]) &\mapsto [f]+[g] := [f+g], \\ K \times K \to K, \quad ([f],[g]) &\mapsto [f]\cdot[g] := [f \cdot g]. \end{aligned}$$

Let $0, 1 \in S$ denote the constant functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with values $0, 1$, respectively. We claim that with these operations and the elements $[0]$ and $[1]$ the set K becomes a field.

The associativity, commutativity, and distributivity laws as well as the laws for the identity elements follow by direct, if tedious, calculation from the ring axioms for the values of the functions at any $x \in \mathbb{R}$.

The additive inverse of an element $[f]$ is $[-f]$, because on $\mathrm{dom}(f)$ we have $(f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = 0$ and therefore $f + (-f) \sim 0$ in S and hence $[f] + [-f] = [0]$.

Next the functions 0 and 1 do not agree anywhere on $\mathbb{R}$; in particular not on a subset $X \subset \mathbb{R}$ with $|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$. Thus $0 \not\sim 1$; in other words $[0] \neq [1]$.

Finally consider any $[f] \in K \smallsetminus \{[0]\}$. Choose $u, v \in \mathbb{R}[X]$ with $\forall x \in \mathrm{dom}(f):$ $v(x) \neq 0$ und $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. In the case $u = 0$ we would have $f(x) = 0$ for all $x \in \mathrm{dom}(f)$ and hence $f \sim 0$ and $[f] = [0]$, contrary to the assumption. Thus $u \neq 0$. As a non-zero polynomial it has at most finitely many zeros in $\mathbb{R}$. Thus $X := \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid u(x) \neq 0\}$ again satisfies $|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$. Define $f' \colon X \to \mathbb{R}$ by $f'(x) := \frac{v(x)}{u(x)}$. Then $f' \in S$, and the fact that $\forall x \in X \colon f(x) \cdot f'(x) = 1$ implies that $f \cdot f' \sim 1$, or equivalently $[f] \cdot [f'] = [1]$. This proves the last of the field axioms.

(c) To any polynomial $u \in \mathbb{R}[X]$ we associate the polynomial function $\tilde{u} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$. By the definition of the ring structure of K this defines a ring homomorphism $\mathbb{R}[X] \to K$, $u \mapsto [\tilde{u}]$. For any distinct $u, v \in \mathbb{R}[X]$ the non-zero polynomial $u - v$ has at most finitely many zeros in $\mathbb{R}$; hence the set $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) = v(x)\}$ is finite. Thus $\tilde{u} \not\sim \tilde{v}$; in other words $[\tilde{u}] \neq [\tilde{v}]$. The homomorphism $\mathbb{R}[X] \to K$ is therefore injective. By the universal property of the quotient field this homomorphism extends to a unique field homomorphism $\mathbb{R}(X) := \mathrm{Quot}(\mathbb{R}[X]) \to K$. As a field homomorphism this is automatically injective. On the other hand, for any $[f] \in K$ by definition there exist $u, v \in \mathbb{R}[X]$ with $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \colon v(x) \neq 0$ und $f(x) \cdot v(x) = u(x)$. This means that $[f] \cdot [\tilde{v}] = [\tilde{u}]$ with $[\tilde{v}] \neq [0]$, or equivalently $[f] = [\tilde{u}]/[\tilde{v}]$. Thus $[f]$ lies in the image, and so the homomorphism is surjective. It is therefore an isomorphism.

3. Zeige für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und alle Elemente x, y eines Rings R die Formeln

   (a) $(x)(y) = (xy)$

   (b) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$

   (c) $(x) \cdot ((y) \cdot \mathfrak{a}) = (xy) \cdot \mathfrak{a}$

   Lösung:

   (a) Let $r \in (x)(y)$. Then $r = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ with $x_i \in (x)$ and $y_i \in (y)$. Write $x_i = a_i x$ and $y_i = b_i y$ for $a_i, b_i \in R$. Then we have

   $$r \;=\; \sum_{i=1}^n (a_i x) \cdot (b_i y) \;=\; \sum_{i=1}^n (a_i b_i) \cdot xy \;=\; \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) \cdot xy \;\in\; (xy).$$

   This proves the inclusion "$\subset$ ". For the reverse inclusion we write any $r \in (xy)$ in the form $r = axy = ax \cdot y$ for some $a \in R$. This directly shows that $r \in (x)(y)$, proving the inclusion " $\supset$ ".

   (b) Let $x \in \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$. Then $x = \sum_{i=1}^n a_i d_i$ where $a_i \in \mathfrak{a}$ and $d_i \in \mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Similarly each $d_i = \sum_{j=1}^{m_i} b_{i,j} c_{i,j}$ with $b_{i,j} \in \mathfrak{b}$ and $c_{i,j} \in \mathfrak{c}$. Hence we have

   $$x \;=\; \sum_{i=1}^n a_i d_i \;=\; \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^{m_i} b_{i,j} c_{i,j}\right) \;=\; \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (a_i b_{i,j}) c_{i,j}.$$

   Now $(a_i b_{i,j}) c_{i,j} \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$ for each i. Since ideals are closed under addition, we see that $x \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$. We have thus shown the inclusion"$\subset$". The argument for "$\supset$" is analogous.

   (c) Using first (b) and then (a) shows that $(x) \cdot ((y) \cdot \mathfrak{a}) = ((x) \cdot (y)) \cdot \mathfrak{a} = (xy) \cdot \mathfrak{a}$.

4. Entscheide, welche der folgenden Ideale von $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$ gleich sind:

   $$\begin{aligned} I_1 &:= (X, Y) & \qquad I_5 &:= (XZ, X - Y, X + Y) \\ I_2 &:= (X, Y, Z) & I_6 &:= (X^2 + Y^2, Z - Y^2, Z - X^2) \\ I_3 &:= (X^2, Y^2, Z) & I_7 &:= (XZ, Y^2 - 5X^2, X^2 - XZ) \\ I_4 &:= (XZ, X^2, Y^2) \end{aligned}$$

   Lösung: Für jedes Monom M besteht das Ideal (M) aus denjenigen Polynomen, in denen nur solche Monome vorkommen, die durch M teilbar sind. Für beliebige Monome $M_1, \ldots, M_n$ besteht daher $(M_1, \ldots, M_n)$ aus denjenigen Polynomen, in denen nur solche Monome vorkommen, die durch mindestens eines der M_i teilbar sind. Also liegt Z in den Idealen I_2 und I_3, aber nicht in I_1 oder I_4. Weiter liegt Y in den Idealen I_1 und I_2, aber nicht in I_3 oder I_4. Daher sind die Ideale I_1 bis I_4 alle verschieden.

Sodann enthält I_5 die beiden Elemente

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\cdot\big((X+Y)+(X-Y)\big) &= X \quad \text{und} \\ \tfrac{1}{2}\cdot\big((X+Y)-(X-Y)\big) &= Y \end{aligned}$$

Da umgekehrt $X \pm Y$ Linearkombinationen dieser Elemente sind, ist dieses Ideal gleich (XZ, X, Y). Hier ist nun XZ schon ein Vielfaches von X; darum können wir dieses Erzeugende weglassen. Daher gilt $I_5 = (X, Y) = I_1$.

Analog rechnen wir

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\cdot\big((X^2+Y^2)+(Z-Y^2)+(Z-X^2)\big) &= Z \quad \text{und} \\ Z-(Z-X^2) &= X^2 \quad \text{und} \\ Z-(Z-Y^2) &= Y^2. \end{aligned}$$

Umgekehrt sind $X^2+Y^2, Z-Y^2, Z-X^2$ schon Linearkombinationen von Z, X^2, Y^2; also ist das Ideal I_6 gleich I_3.

Schliesslich rechnen wir

$$\begin{aligned} XZ+(X^2-XZ) &= X^2 \quad \text{und} \\ (Y^2-5X^2)+5\cdot X^2 &= Y^2. \end{aligned}$$

Umgekehrt sind Y^2-5X^2 und X^2-XZ schon Linearkombinationen von XZ, X^2, Y^2; also ist das Ideal I_7 gleich I_4.

5. Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heisst *nilpotent*, falls ein $n \geqslant 1$ mit $x^n = 0$ existiert. Beweise oder widerlege:

   (a) Die Menge der Nullteiler von R zusammen mit 0 ist ein Ideal von R.

   (b) Die Menge I der nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal von R.

   (c) Für I in (b) enthält der Faktorring R/I ausser 0 keine nilpotenten Elemente.

   Lösung:

   (a) Im Ring $R := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt $(1,0)\cdot(0,1) = (0,0) = 0_R \neq (1,0), (0,1)$. Deshalb sind $(1,0)$ und $(0,1)$ Nullteiler von R. Jedoch ist $1_R = (1,1) = (1,0) + (0,1)$ als Einselement kein Nullteiler von R. Darum ist die Menge der Nullteiler von R zusammen mit 0 nicht additiv abgeschlossen. Sie ist also kein Ideal von R und die Aussage ist widerlegt.

   (b) Das Element 0 ist nilpotent wegen $0^1 = 0$. Sodann seien $a, b \in R$ nilpotent. Dann gibt es $n, m \geqslant 1$ mit $a^n = b^m = 0$. Da R kommutativ ist, gilt dann

$$(a+b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k}.$$

Nach Voraussetzung ist aber $a^k = 0$ für $n \leqslant k \leqslant n+m$ und $b^{n+m-k} = 0$ für $0 \leqslant k \leqslant n$. Deshalb verschwinden alle Summanden und es gilt $(a+b)^{n+m} = 0$; also ist $a+b$ nilpotent. Für jedes $x \in R$ folgt aus $a^n = 0$ weiter $(xa)^n = x^n a^n = x^n 0 = 0$; also ist auch xa nilpotent. Somit ist die Menge I der nilpotenten Elemente von R ein Ideal von R und die Aussage bewiesen.

(c) Da I ein Ideal von R ist, existiert der Faktorring R/I. Sei $x+I$ ein nilpotentes Element von R/I. Dann gibt es ein $n \geqslant 1$ mit $x^n + I = (x+I)^n = I$, also mit $x^n \in I$. Nach der Definition von I gibt es nun ein $m \geqslant 1$ mit $x^{nm} = (x^n)^m = 0$. Somit ist x selbst nilpotent und liegt daher in I. Dies bedeutet aber, dass $x + I = I$ das Nullelement von R/I ist. Somit haben wir gezeigt, dass der Faktorring R/I ausser 0 keine nilpotenten Elemente besitzt.

6. Betrachte einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S$ und setze

$$\mathfrak{a} \ := \ \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \ := \ \{a \in R \mid \varphi(a) \in \mathfrak{b}\}.$$

(a) Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeige, dass φ einen injektiven Ringhomomorphismus $R/\mathfrak{a} \hookrightarrow S/\mathfrak{b}$ induziert.

(c) Folgere: Ist $\mathfrak{b}$ ein Primideal, so ist auch $\mathfrak{a}$ ein Primideal.

Lösung:

(a) Since $0 \in \mathfrak{b}$ and $\varphi(0) = 0$, we have $0 \in \mathfrak{a}$, and it follows that $\mathfrak{a} \neq \varnothing$. Next let $a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$. Then $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2) \in \mathfrak{b}$. Since φ is additive and $\mathfrak{b}$ is closed under addition, it follows that $\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \in \mathfrak{b}$. Therefore $a_1 + a_2 \in \mathfrak{a}$, and $\mathfrak{a}$ is closed under addition. Similarly, for any $a \in \mathfrak{a}$ and any $x \in R$ we have $\varphi(a) \in \mathfrak{b}$. Since φ is multiplicative and $\mathfrak{b}$ is closed under scalar multiplication, it follows that $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) \in \mathfrak{b}$. Therefore $xa \in \mathfrak{a}$. Together this shows that $\mathfrak{a}$ is an ideal of R.

(b) Let ψ denote the composite of φ with the factor map $S \twoheadrightarrow S/\mathfrak{b}$. Then for any $x \in R$ we have $\psi(x) = \varphi(x) + \mathfrak{b} = 0 + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ if and only if $\varphi(x) \in \mathfrak{b}$, that is, if and only if $x \in \mathfrak{a}$. Thus $\ker(\psi) = \mathfrak{a}$. By the homomorphism theorem ψ therefore induces an isomorphism $R/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\varphi)$. In other words the composite homomorphism $R/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow S/\mathfrak{b}$ is injective.

(c) If $\mathfrak{b}$ is a prime ideal, then $S/\mathfrak{b}$ is an integral domain. The subring $\mathrm{Im}(\varphi)$ is then again an integral domain; hence by the above isomorphism so is $R/\mathfrak{a}$. Therefore $\mathfrak{a}$ is a prime ideal, as desired.

7. Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuche, wann der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2-a)$ isomorph zu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, beziehungsweise zu $\mathbb{C}$, beziehungsweise zu keinem der beiden ist.

   Lösung: Mit $\alpha := \sqrt{|a|}$ definieren wir

$$\begin{array}{llll} \varphi\colon \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}, & f \mapsto (f(\alpha), f(-\alpha)) & \text{für } a > 0, \\ \varphi\colon \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, & f \mapsto f(\alpha i) & \text{für } a < 0. \end{array}$$

   Dies ist ein Ringhomomorphismus, da jede Komponente ein Auswertungshomomorphismus ist. Sodann ist in beiden Fällen $\alpha \neq 0$. Betrachte beliebige $c, d \in \mathbb{R}$. Im Fall $a > 0$ ist $f(X) := \frac{c+d}{2} + \frac{c-d}{2\alpha}X$ ein Polynom mit $f(\alpha) = c$ und $f(-\alpha) = d$, und im Fall $a < 0$ ist $f(X) := c + \frac{d}{\alpha}X$ ein Polynom mit $f(\alpha i) = c + di$. In beiden Fällen ist φ also surjektiv.

   Weiter gilt in beiden Fällen $\varphi(X^2-a) = 0$. Somit enthält $\ker(\varphi)$ das Element X^2-a und damit auch das davon erzeugte Ideal $\mathfrak{a} := (X^2-a)$. Nach der universellen Eigenschaft des Faktorrings induziert φ daher einen surjektiven $\mathbb{R}$-linearen Ringhomomorphismus

$$\overline{\varphi}\colon\ \mathbb{R}[X]/\mathfrak{a} \longrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ \mathbb{C}. \end{cases}$$

   Nun beschreiben wir die Elemente des Faktorrings $\mathbb{R}[X]/\mathfrak{a}$ explizit: Nach Polynomdivision mit Rest existieren für jedes $f \in \mathbb{R}[X]$ eindeutige $q, r \in \mathbb{R}[X]$ mit

$$f(X) \;=\; q(X)(X^2-a) + r(X)$$

   und $\deg(r) \leqslant 1$. In $\mathbb{R}[X]/\mathfrak{a}$ gilt also $f(X) + \mathfrak{a} = uX + v + \mathfrak{a}$ für eindeutige $u, v \in \mathbb{R}$. Somit ist $\mathbb{R}[X]/\mathfrak{a}$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Da $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ebenfalls Dimension 2 über $\mathbb{R}$ haben und $\overline{\varphi}$ eine surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, ist $\overline{\varphi}$ daher in beiden Fällen bijektiv und damit ein Ringisomorphismus.

   Im Fall $a = 0$ hat der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2-a) = \mathbb{R}[X]/(X^2)$ mit $\bar{f} := X + (X^2)$ ein von Null verschiedenes nilpotentes Element mit $\bar{f}^2 = 0$. Die Ringe $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben keine solchen Elemente und sind daher nicht zu $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ isomorph.