Serie 9

Quotientenkörper, Faktorringe, Primideale, Unterkörper

1. Entscheide, welche der folgenden Faktorringe isomorph sind:

$$\begin{array}{lll} R_1 & := & \mathbb{Q}[X,Y]/(X^2) \\ R_2 & := & \mathbb{Q}[X,Y]/(XY) \\ R_3 & := & \mathbb{Q}[X,Y]/(X,Y) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} R_4 & := & \mathbb{Q}[X,Y]/(XY+3X+2Y+6) \\ R_5 & := & \mathbb{Q}[X,Y,Z]/(X^2,Y-Z) \\ R_6 & := & \mathbb{Q}[X,Y,Z]/(XZ-5,Y^2,Z) \end{array}$$

2. Zeige, dass ein echtes Ideal $\mathfrak{p} \subsetneqq R$ dann und nur dann ein Primideal ist, wenn für beliebige Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ gilt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \implies (\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \text{ oder } \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}).$$

3. (a) Zeige, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.
   (b) Sei R ein Ring und I ein Primideal von R mit endlichem Faktorring R/I. Folgere aus (a), dass I ein maximales Ideal von R ist.

4. Sei R der Ring der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
   (a) Hat R Nullteiler?
   (b) Zeige, dass R überabzählbar viele maximale Ideale hat.
   *(c) Bestimme alle maximale Ideale von R.
   **(d) Sind alle maximale Ideale von R Hauptideale? Sind sie endlich erzeugt?
   **(e) Gibt es Primideale von R, die keine maximalen Ideale sind?

*5. *Alternative Konstruktion des Quotientenkörpers:* Sei R ein Integritätsbereich. Betrachte den Polynomring $S := R[X_a|_{a\in R\smallsetminus\{0\}}]$ in neuen Variablen X_a und das von den Polynomen $aX_a - 1$ für alle $a \in R \smallsetminus \{0\}$ erzeugte Ideal $\mathfrak{m} \subset S$.

(a) Konstruiere einen natürlichen surjektiven Homomorphismus $S/\mathfrak{m} \to \mathrm{Quot}(R)$.

(b) Zeige: Für jedes $f \in S$ existieren $r \geqslant 0$ und $a_1, \ldots, a_r \in R \smallsetminus \{0\}$ sowie $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ und $b \in R$ mit $f \equiv bX_{a_1}^{\nu_1} \cdots X_{a_r}^{\nu_r} \mod \mathfrak{m}$.

(c) Zeige, dass $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist.

(d) Folgere, dass der Homomorphismus in (a) ein Isomorphismus ist.

**(e) Beweise $\mathfrak{m} \neq (1)$ ohne den Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ zu benutzen.

**(f) Zeige unabhängig von (a) und (d), dass $S/\mathfrak{m}$ dieselbe universelle Eigenschaft wie $\mathrm{Quot}(R)$ hat.

**6. Der Satz von Krull besagt, dass jeder von Null verschiedene Ring ein maximales Ideal besitzt. Im Beweis dieses Satzes haben wir das Zornsche Lemma verwendet. Kann man umgekehrt das Zornsche Lemma oder das Auswahlaxiom aus dem Satz von Krull herleiten?

7. Gegeben seien ein Körper K, eine nichtleere Indexmenge I und für jedes $i \in I$ ein Unterkörper $K_i \subset K$. Zeige: $\bigcap_{i\in I} K_i$ ist ein Unterkörper von K.