Musterlösung Single Choice Aufgaben 10

Körpererweiterungen, Minimalpolynom, Transzendenz

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien a, b algebraisch über K, so dass $[K(a)/K] = 2$ und $[K(b)/K] = 3$ ist. Dann sind die Möglichkeiten für den Grad von $K(a, b)$ über K

   $\boxed{\text{(a)}}$ $[K(a, b)/K] = 6$

   (b) $[K(a, b)/K] = 5$

   (c) $[K(a, b)/K] = 2$ oder $[K(a, b)/K] = 3$

   (d) $[K(a, b)/K] = 1$ oder $[K(a, b)/K] = 2$ oder $[K(a, b)/K] = 3$

   Erklärung: Wegen der Multiplikativität der Körpergrade sind $2 = [K(a)/K]$ und $3 = [K(b)/K]$ Teiler von $[K(a, b)/K]$. Nun gilt aber auch die Ungleichung

   $$[K(a, b)/K] \;\leqslant\; [K(a)/K] \cdot [K(a)/K] \;=\; 2 \cdot 3.$$

   Daher ist $[K(a, b)/K] = 6$.

2. Für jeden Körperturm $M/L/K$ und jedes Element $a \in M$ gilt für die Minimalpolynome $m_{a,K}$ bzw. $m_{a,L}$ von a über K bzw. L

   $\boxed{\text{(a)}}$ $m_{a,L}$ teilt $m_{a,K}$.

   (b) $m_{a,K}$ teilt $m_{a,L}$.

   (c) $m_{a,L} = m_{a,K}$.

   (d) Im Allgemeinen gibt es keine solche Relation.

   Erklärung: Weil $m_{a,K} \in K[X] \subset L[X]$ ein Polynom mit $m_{a,K}(a) = 0$ ist, und $m_{a,L} \in L[X]$ ein irreduzibles Polynom mit der gleichen Nullstelle ist, ist $m_{a,L}$ ein Teiler von $m_{a,K}$. Im Allgemeinen sind sie aber nicht gleich. Zum Beispiel hat $a := \sqrt{2}$ das Minimalpolynom $X^2 - 2$ über $K := \mathbb{Q}$ und das Minimalpolynom $X - \sqrt{2}$ über $M := L := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Darum ist nur (a) richtig.

3. Seien a, b algebraisch über K, so dass ihre Minimalpolynome beide Grad 2 haben. Dann hat das Minimalpolynom von $a + b$ den Grad ...

   (a) 2

   (b) 4

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\leqslant 4$

   (d) $\leqslant 2$

Erklärung: Nach Annahme ist $[K(a)/K] = 2$ und $[K(a,b)/K(a)] \leqslant [K(b)/K] = 2$ und daher $[K(a,b)/K] = [K(a,b)/K(a)] \cdot [K(a)/K]$ ein Teiler von $2 \cdot 2 = 4$. Wegen $K \subset K(a+b) \subset K(a,b)$ und der Multiplikativität der Körpergrade ist darum auch $[K(a+b)/K]$ ein Teiler von 4. Dieser Grad ist aber genau der Grad des Minimalpolynoms von $a+b$ über K.

Jeder Teiler von 4 ist hier möglich. Nehmen wir zum Beispiel $a := \sqrt{2}$ mit dem Minimalpolynom $X^2 - 2$ über $K := \mathbb{Q}$. Im Fall $b = -a$ hat b dasselbe Minimalpolynom vom Grad 2, aber $a + b = 0$ das Minimalpolynom $X - 0$ vom Grad 1. Im Fall $b = a$ hat $a+b = 2a$ das Minimalpolynom $X^2 - 8$ von Grad 2. Im Fall $b = \sqrt{3}$ wurde in Beispiel 3.4.8 der Vorlesung gezeigt, dass das Minimalpolynom von $a+b$ über $\mathbb{Q}$ den Grad 4 hat. Darum ist nur (c) richtig.

4. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $a, b \in L$ mit $L = K(a,b)$. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Falls b über $K(a)$ transzendent ist, so ist b über K transzendent.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Falls b über K transzendent ist, so ist b über $K(a)$ transzendent.

   (c) Falls L/K algebraisch ist, so sind a und b algebraisch über K.

   (d) Sind a und b algebraisch über K, so ist L/K algebraisch.

   Erklärung: Aussage (c) folgt direkt aus der Definition einer algebraischen Körpererweiterung, und (d) wurde in der Vorlesung gezeigt. Aussage (a) ist kontrapositiv zu der Aussage „Falls b algebraisch über K ist, so ist b auch algebraisch über $K(a)$“, die ebenfalls in der Vorlesung gezeigt wurde. Dagegen ist (b) ist falsch, wenn $a = b$ transzendent über K ist.

5. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

   (b) Jede endlich erzeugte Körpererweiterung ist endlich.

   (c) Jede einfache Körpererweiterung ist algebraisch.

   (d) Jede endlich erzeugte Körpererweiterung ist algebraisch.

   Erklärung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass (a) richtig ist. Dagegen zeigt das Beispiel $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$, dass (b), (c) und (d) falsch ist.