Musterlösung Single Choice Aufgaben 12

Faktorielle Ringe, Grösster Gemeinsamer Teiler, Hauptidealringe

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei R ein Integritätsbereich und $p \in R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$. Welche Aussage ist im Allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) p ist irreduzibel.

   (b) $\forall a \in R\colon\ a|p \Rightarrow (a \sim 1 \vee a \sim p)$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\forall a, b \in R\colon\ p|ab \Rightarrow (p|a \vee p|b)$.

   (d) $\forall a, b \in R\colon\ p = ab \Rightarrow (a \in R^\times \vee b \in R^\times)$.

   Erklärung: Aussage (c) ist die Definition von prim und daher nicht äquivalent zu irreduzibel, wie wir in der Vorlesung gesehen haben. Aussage (d) ist die Definition von (a). Diese ist ausserdem äquivalent zu (b). Denn $a|p$ bedeutet $\exists b \in R\colon p = ab$; also ist (b) gleichbedeutend mit

   (b') $\forall a, b \in R\colon\ p = ab \Rightarrow (a \in R^\times \vee p \in aR^\times)$.

   Wegen $p \neq 0$ impliziert $p = ab$ ausserdem $a \neq 0$, und deshalb ist $ab = p \in aR^\times$ äquivalent zu $b \in R^\times$. Somit ist (b') äquivalent zu (d).

2. Welche Aussage ist falsch?

   (a) Jeder Körper ist ein faktorieller Ring.

   (b) Jeder faktorielle Ring ist ein Integritätsbereich.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jeder Unterring eines faktoriellen Rings ist faktoriell.

   (d) Der Nullring ist nicht faktoriell.

   Erklärung: Wir haben gesehen, dass die Unterringe $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ und $K[X^2, X^3] \subset K[X]$ nicht faktoriell sind; dies sind also Gegenbeispiele zu (c).

   Dagegen ist jeder faktorielle Ring nach Definition ein Integritätsbereich; darum sind (b) und (c) richtig. Ausserdem gilt (a), denn jeder Körper ist ein Integritätsbereich, in dem jedes von Null verschiedene Element eine Einheit und damit ein Produkt von Einheiten und/oder Primelementen ist.

3. Im Ring $\mathbb{Z}[i]$ ist $\mathrm{ggT}(i, 1+i, 3)$ assoziiert zu

   $\boxed{\text{(a)}}$ 1

   (b) 3

   (c) $1 + i$

   (d) 2

Erklärung: In diesem Fall ist $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$. Also ist i eine Einheit in $\mathbb{Z}[i]$, und daher muss der grösste gemeinsame Teiler ebenfalls eine Einheit sein. Somit ist (a) die einzige richtige Antwort.

4. Welche Formel gilt in jedem faktoriellen Ring R?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\forall a, b, c \in R\colon\ \ \operatorname{ggT}(a,b,c) \sim \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a,b),c)$

   (b) $\forall a, b, c \in R\colon\ \ \operatorname{ggT}(a,b,c) \sim \operatorname{ggT}(a+b,c)$

   (c) $\forall a, b, c, d \in R\colon\ \ \operatorname{ggT}(a,b,c,d) \sim \operatorname{ggT}(a,b)\operatorname{ggT}(c,d)$

   (d) $\forall a, b, c \in R\colon\ \ \operatorname{ggT}(a+b,c) \sim \operatorname{ggT}(a,c)\operatorname{ggT}(b,c)$

   Erklärung: In $\mathbb{Z}$ ist $(a,b,c) = (1,-1,2)$ ein Gegenbeispiel zu (b) und zu (d) wegen $\operatorname{ggT}(1,-1,2) \sim \operatorname{ggT}(1,2) \sim \operatorname{ggT}(-1,2) \sim 1 \not\sim 2 \sim \operatorname{ggT}(0,2)$. Ein Gegenbeispiel zu (c) ist $\operatorname{ggT}(2,2,3,3) \sim 1 \not\sim 6 \sim \operatorname{ggT}(2,2)\operatorname{ggT}(3,3)$ in $\mathbb{Z}$.

   Wir zeigen nun die Formel in (a). Weil $\operatorname{ggT}(a,b,c)$ die Elemente a,b,c teilt, gilt $\operatorname{ggT}(a,b,c) \mid \operatorname{ggT}(a,b)$ und $\operatorname{ggT}(a,b,c) | c$, also auch $\operatorname{ggT}(a,b,c) \mid \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a,b),c)$. Umgekehrt teilt $\operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a,b),c)$ die Elemente c und $\operatorname{ggT}(a,b)$, teilt also auch a und b. Deshalb gilt $\operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a,b),c) \mid \operatorname{ggT}(a,b,c)$. Daraus folgt (a).

5. Welcher der folgenden Ringe ist kein Hauptidealring?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\mathbb{Z}[X]$

   (b) $\mathbb{Q}[X]$

   (c) $\mathbb{Z}$

   (d) $\mathbb{F}_2$

   Erklärung: In $\mathbb{Z}[X]$ gilt $\operatorname{ggT}(2,X) \sim 1$, aber $(2,X) \neq (1)$, also kann $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring sein.