Single Choice Aufgaben 13

Hauptidealringe und euklidische Ringe, Irreduzibilitätskriterien

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Für welches Kongruenzsystem existiert keine ganzzahlige Lösung?

   (a) $x \equiv 34 \bmod 1024, \quad x \equiv 5 \bmod 25, \quad x \equiv 14 \bmod 49$

   (b) $x \equiv 17 \bmod 24, \quad x \equiv 1 \bmod 27, \quad x \equiv 21 \bmod 2017$

   (c) $x \equiv 1 \bmod 33, \quad x \equiv 45 \bmod 55, \quad x \equiv 23 \bmod 77$

   (d) $x \equiv 10 \bmod 39, \quad x \equiv 63 \bmod 512, \quad x \equiv 33 \bmod 35$

2. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

   (a) Jeder euklidische Ring ist ein Integritätsbereich.

   (b) Jeder Hauptidealring ist faktoriell.

   (c) Jeder faktorielle Ring ist euklidisch.

   (d) Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

3. Sei (R, δ) ein euklidischer Ring. Dann...

   (a) ist jeder Unterring $S \subset R$ ebenfalls euklidisch mit $\delta|_S$.

   (b) ist jeder Oberring $S \supset R$ euklidisch mit einer Norm $\tilde{\delta}$ mit $\tilde{\delta}|_R = \delta$.

   (c) ist der Polynomring $R[X]$ euklidisch.

   (d) ist die Abbildung $\delta^2 : x \mapsto \delta(x)^2$ ebenfalls eine euklidische Norm.

4. Sei R ein faktorieller Ring. Welche Eigenschaft erfüllt der Inhalt nicht?

   (a) $\forall f, g \in R[X] \setminus \{0\}\colon\ I(f+g) \sim I(f) + I(g)$.

   (b) $\forall f, g \in R[X] \setminus \{0\}\colon\ I(fg) \sim I(f)I(g)$.

   (c) $\forall f \in R[X] \setminus \{0\}\colon\ \frac{f}{I(f)}$ ist ein Polynom in $R[X]$.

   (d) $\forall f \in R[X] \setminus \{0\}\colon\ \forall r \in R \setminus \{0\}\colon\ I(rf) \sim rI(f)$.

5. Welche Aussage gilt für jeden faktoriellen Ring R mit Quotientenkörper K?

   (a) Ein Polynom $f \in K[X] \setminus \{0\}$ liegt in $R[X]$ genau dann, wenn $I(f) \in R$ ist.

   (b) Ein Element von $R[X]$ ist irreduzibel genau dann, wenn es in $K[X]$ irreduzibel ist.

   (c) Ein Polynom vom Grad 3 in $R[X]$ ist irreduzibel genau dann, wenn es keine Nullstelle in R besitzt.

   (d) Jedes irreduzible Element von $R[X]$ ist irreduzibel in $K[X]$.