Musterlösung Single Choice Aufgaben 13

Hauptidealringe und euklidische Ringe, Irreduzibilitätskriterien

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Für welches Kongruenzsystem existiert keine ganzzahlige Lösung?

   (a) $x \equiv 34 \bmod 1024, \quad x \equiv 5 \bmod 25, \quad x \equiv 14 \bmod 49$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $x \equiv 17 \bmod 24, \quad x \equiv 1 \bmod 27, \quad x \equiv 21 \bmod 2017$

   (c) $x \equiv 1 \bmod 33, \quad x \equiv 45 \bmod 55, \quad x \equiv 23 \bmod 77$

   (d) $x \equiv 10 \bmod 39, \quad x \equiv 63 \bmod 512, \quad x \equiv 33 \bmod 35$

   Erklärung: Die Kongruenzen (b) haben keine gemeinsame Lösung, denn die ersten beiden Gleichungen implizieren $x \equiv 17 \equiv 2 \bmod 3$ und $x \equiv 1 \bmod 3$, welche nicht gleichzeitig gelten können.

   Dagegen ist (a) lösbar nach dem chinesischen Restsatz, da $1024 = 2^{10}$ und $25 = 5^2$ und $49 = 7^2$ paarweise teilerfremd sind. Entsprechend ist (d) lösbar, da $39 = 3 \cdot 13$ und $512 = 2^9$ und $35 = 5 \cdot 7$ paarweise teilerfremd sind.

   Auch (c) ist lösbar, obwohl der chinesische Restsatz nicht angewendet werden kann. Der Grund dafür ist, dass die Moduln 33 und 55 und 77 paarweise denselben grössten gemeinsamen Teiler 11 haben und dass $1 \equiv 45 \equiv 23 \bmod 11$ ist. Genauer führt der Ansatz $x = 1 + 11y$ zu den Kongruenzen $y \equiv 0 \bmod 3$ und $y \equiv 4 \bmod 5$ sowie $y \equiv 2 \bmod 7$, welche nach dem chinesischen Restsatz eine gemeinsame Lösung besitzen.

2. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

   (a) Jeder euklidische Ring ist ein Integritätsbereich.

   (b) Jeder Hauptidealring ist faktoriell.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jeder faktorielle Ring ist euklidisch.

   (d) Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

   Erklärung: Es gelten die Implikationen *Euklidisch* $\Rightarrow$ *Hauptidealring* $\Rightarrow$ *Faktoriell* $\Rightarrow$ *Integritätsbereich*.

3. Sei (R, δ) ein euklidischer Ring. Dann...

   (a) ist jeder Unterring $S \subset R$ ebenfalls euklidisch mit $\delta|_S$.

   (b) ist jeder Oberring $S \supset R$ euklidisch mit einer Norm $\tilde{\delta}$ mit $\tilde{\delta}|_R = \delta$.

   (c) ist der Polynomring $R[X]$ euklidisch.

   $\boxed{\text{(d)}}$ ist die Abbildung $\delta^2 : x \mapsto \delta(x)^2$ ebenfalls eine euklidische Norm.

Erklärung: Da δ nur nicht-negative Werte annimmt, folgt aus $\delta(r) < \delta(b)$ sofort $\delta(r)^2 < \delta(b)^2$. Daher ist auch (R, δ^2) ein euklidischer Ring.

Dagegen hat der euklidische Ring $\mathbb{Z}$ den Oberring $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, der aber nicht faktoriell und somit auch nicht euklidisch ist. Zudem ist auch $\mathbb{Z}[X]$ nicht euklidisch, weil es kein Hauptidealring ist. Also sind (b) und (c) falsch. Sodann ist jeder Körper euklidisch mit der konstanten Funktion $\delta(x) = 0$. Also ist $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ein Unterring des euklidischen Rings $\mathbb{C}$, aber nicht selbst euklidisch, somit ist auch (a) falsch.

4. Sei R ein faktorieller Ring. Welche Eigenschaft erfüllt der Inhalt nicht?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\forall f, g \in R[X] \smallsetminus \{0\}\colon\ I(f+g) \sim I(f) + I(g)$.

   (b) $\forall f, g \in R[X] \smallsetminus \{0\}\colon\ I(fg) \sim I(f)I(g)$.

   (c) $\forall f \in R[X] \smallsetminus \{0\}\colon\ \frac{f}{I(f)}$ ist ein Polynom in $R[X]$.

   (d) $\forall f \in R[X] \smallsetminus \{0\}\colon\ \forall r \in R \smallsetminus \{0\}\colon\ I(rf) \sim rI(f)$.

   Erklärung: Als grösster gemeinsamer Teiler ist der Inhalt nur bis auf Assoziiertheit definiert, und eine Formel, in der ein ggT ohne Vorfaktor in einer Addition vorkommt, ist immer suspekt. Zum Beispiel gilt in $\mathbb{Z}[X]$ konkret $I(X^2+X) \sim 1 \not\sim 2 \sim I(X^2) + I(X)$; darum ist (a) falsch. Die restlichen Eigenschaften haben wir in der Vorlesung gesehen.

5. Welche Aussage gilt für jeden faktoriellen Ring R mit Quotientenkörper K?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Ein Polynom $f \in K[X] \smallsetminus \{0\}$ liegt in $R[X]$ genau dann, wenn $I(f) \in R$ ist.

   (b) Ein Element von $R[X]$ ist irreduzibel genau dann, wenn es in $K[X]$ irreduzibel ist.

   (c) Ein Polynom vom Grad 3 in $R[X]$ ist irreduzibel genau dann, wenn es keine Nullstelle in R besitzt.

   (d) Jedes irreduzible Element von $R[X]$ ist irreduzibel in $K[X]$.

   Erklärung: Aussage (a) ist Lemma 4.6.5 der Vorlesung. Sodann ist $3 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Gegenbeispiel zu (b) und (d). Schliesslich hat das Polynom $(3X-1)^3 \in \mathbb{Z}[X]$ den Grad 3 und ist reduzibel, besitzt jedoch keine Nullstelle in $\mathbb{Z}$, also ist (c) falsch.