Single Choice Aufgaben 5

Freie Gruppen, Erzeugende & Relationen, Ringe

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei I eine endliche Menge. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Die Abelisierung einer freien Gruppe über I ist eine freie abelsche Gruppe über I.

   (b) Je zwei freie Gruppen über I sind isomorph.

   (c) Eine freie Gruppe über I kann nicht zu einer freien abelschen Gruppe über I isomorph sein.

   (d) Es existiert ein natürlicher surjektiver Homomorphismus $F_I \twoheadrightarrow F_I^{\mathrm{ab}}$.

2. Welche durch Erzeugende und Relationen definierte Gruppe ist *nicht* isomorph zur D_4?

   (a) $G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^4 = 1 \rangle$

   (b) $G_2 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = xyxy = 1 \rangle$

   (c) $G_3 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1 \rangle$

   (d) $G_4 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$

3. Welche Aussage ist richtig für jeden Ring R und jedes Element $x \in R^\times$?

   (a) $\forall y \in R\colon\ y \cdot x \in R^\times$

   (b) $x^2 \in R^\times$

   (c) $x - 1 \in R^\times$

   (d) $\forall y \in R\ \exists z \in R\colon\ y \cdot z = x.$

4. Sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) $\varphi(1_R) = 1_S$

   (b) $\varphi(0_R) = 0_S$

   (c) $\forall x \in R\colon \varphi(x + 5 \cdot 1_R) = \varphi(x) + 5 \cdot 1_S$

   (d) $\varphi(R^\times) = S^\times$

5. Welche Aussage gilt für alle Körper K und L?

   (a) Jeder Ringhomomorphismus $K \to L$ ist injektiv.

   (b) Jeder Ringhomomorphismus $K \to L$ ist surjektiv.

   (c) Jeder Unterring von K ist ein Körper.

   (d) Jeder Oberring von K ist ein Körper.