Single Choice Aufgaben 7

Polynomringe, Matrizen, Integritätsbereiche

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welches ist *kein* Grund, weshalb man ein Polynom nicht mit seiner Polynomfunktion identifizieren darf?
   (a) Über endlichen Ringen können verschiedene Polynome dieselbe Polynomfunktion darstellen.
   (b) Polynome kann man über einem grösseren Ring auswerten.
   (c) In Polynome kann man auch Matrizen einsetzen.
   (d) Nicht jede Polynomfunktion kann als Polynom ausgedrückt werden.

2. Welche der folgenden 2×2-Matrizen ist invertierbar über $\mathbb{Z}$?
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Betrachte die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Menge $R := \{a \cdot I_2 + b \cdot A \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Matrixaddition und -multiplikation. Wieso ist R kein Integritätsbereich?
   (a) Weil R kein Ring ist.
   (b) Weil der Matrixring $\{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{Q}\}$ kein Integritätsbereich ist.
   (c) Weil das Minimalpolynom von A in zwei Linearfaktoren zerfällt.
   (d) Weil A invertierbar ist.

4. Sei R ein Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen korrekt?
   (a) Sei $G \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ ein Nullteiler. Dann ist jeder Koeffizient von G entweder 0 oder ein Nullteiler von R.
   (b) Für jeden Nullteiler $x \in R$ gilt: $\forall y \in R \;\Rightarrow\; xy = 0$.
   (c) Das Produkt zweier Nullteiler ist stets ein Nullteiler.
   (d) Seien $x, y \in R$ keine Nullteiler. Dann ist auch ihr Produkt xy kein Nullteiler.

5. Sei R ein von Null verschiedener Ring. Welche der folgenden Aussagen ist nicht äquivalent zu den anderen?
   (a) Der Ring R ist ein Integritätsbereich.
   (b) In R gilt die Kürzungsregel: $\forall x, y, z \in R\colon\; xy = xz \;\wedge\; x \neq 0 \;\Rightarrow\; y = z$.
   (c) In R gilt die Einheitenregel: $\forall x, y \in R\colon\; x \in R^\times \;\wedge\; y \neq 0 \;\Rightarrow\; xy \in R^\times$.
   (d) Der Ring R besitzt keine Nullteiler.