Musterlösung Single Choice Aufgaben 9

Ideale, Faktorringe, Primideale

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

   (b) Jeder nichttriviale Ring besitzt ein Primideal.

   (c) Das Einsideal ist nie ein Primideal.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Das Nullideal ist immer ein Primideal.

   Erklärung: Die Aussagen (a) und (b) kennen wir aus der Vorlesung. Nach Definition ist ein Primideal immer ein echtes Ideal, also ist das Einsideal nie ein Primideal und auch Aussage (c) richtig. Hingegen ist das Nullideal genau dann ein Primideal, wenn der Ring ein Integritätsbereich ist, also ist (d) falsch.

2. Welches der folgenden Ideale in $\mathbb{Q}[X]$ ist kein maximales Ideal?

   (a) (X)

   $\boxed{\text{(b)}}$ $(X^2 - 1)$

   (c) $(X^2 + 1)$

   (d) $(X^2 - 2)$

   Erklärung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass das Ideal (f) für ein von Null verschiedenes $f \in \mathbb{Q}[X]$ genau dann maximal ist, wenn f irreduzibel ist. Im vorliegenden Fall ist das Polynom $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$ reduzibel, die übrigen aber irreduzibel und erzeugen daher maximale Ideale.

3. Welche Aussage ist im Allgemeinen *korrekt*?

   (a) Für jeden Körper K existiert ein Körperhomomorphismus $\mathbb{F}_2 \to K$.

   (b) Für jeden Körper K existiert ein Körperhomomorphismus $K \to \mathbb{F}_2$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Für jeden Körper K existiert ein Körperhomomorphismus $\mathbb{Q} \to K$ oder $\mathbb{F}_p \to K$ für eine Primzahl p.

   (d) Für jeden Körper K existiert ein Körperhomomorphismus $K \to \mathbb{Q}$ oder $K \to \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p.

   Erklärung: Die Aussage (c) ist im Wesentlichen die Konstruktion des Primkörpers von K aus Proposition 3.1.3 der Vorlesung. Demgegenüber ist in (d) die Richtung der Pfeile vertauscht. Da jeder Körperhomomorphismus injektiv ist, ist (d) schon aus Kardinalitätsgründen falsch für $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. Schliesslich erhält jeder Körperhomomorphismus die Charakteristik nach Proposition 3.1.5 der Vorlesung. Somit sind (a) und (b) falsch für jeden Körper K der Charakteristik $\neq 2$.

4. Sei $M/L/K$ ein Körperturm. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

   (a) Ist M/K endlich, dann sind auch M/L und L/K endlich.

   (b) Sind M/L und L/K endlich, so ist auch M/K endlich.

   (c) Ist M/K einfach, so ist auch M/L einfach.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Ist M/L einfach, so ist auch M/K einfach.

   Erklärung: Aussagen (a) und (b) sind Teile von Proposition 3.2.4 der Vorlesung. Auch Aussage (c) ist richtig, denn aus $M = K(a)$ folgt $M = K(a) \subset L(a) \subset M$ und damit $M = L(a)$. Hingegen ist Aussage (d) falsch, zum Beispiel für eine nicht-einfache Körpererweiterung L/K und $M = L$.

5. Seien K_1, K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *korrekt*?

   (a) Die Körper K_1, K_2 sind Zwischenkörper von $L/(K_1K_2)$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Der Körper K_1K_2 ist ein Zwischenkörper von L/K_1.

   (c) Es gilt $K_1K_2 = \{\sum_i x_iy_i \,|\, x_i \in K_1, y_i \in K_2\}$.

   (d) Der Körper K ist ein Zwischenkörper von $L/(K_1 \cap K_2)$.

   Erklärung: Der Körper K_1K_2 ist der von $K_1 \cup K_2$ erzeugte Zwischenkörper von L/K und als solcher auch ein Zwischenkörper von L/K_1. Somit ist (b) korrekt. Dagegen ist (a) nur richtig wenn $K_1K_2 \subset K_1$ und $K_1K_2 \subset K_2$ und damit $K_1 = K_2$ ist, im Allgemeinen also nicht. Sodann ist (d) nur richtig wenn $K_1 \cap K_2 = K$ ist, im Allgemeinen also nicht. Schliesslich haben wir in der Vorlesung gesehen, dass (c) im Allgemeinen falsch ist, wenn nicht K_1/K oder K_2/K endlich ist.