Musterlösung Single Choice Aufgaben 1

Gruppen, Untergruppen, Gruppenordnung

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. In welchen Gruppen G gilt die Kürzungsregel

$$\forall x, y, z \in G\colon\ xy = xz \ \Rightarrow\ y = z?$$

   $\boxed{\text{(a)}}$ In jeder Gruppe.
   (b) Nur in abelschen Gruppen.
   (c) Nur in nicht-abelschen Gruppen.
   (d) Nur in sogenannten Integritätsgruppen.

   Erklärung: Weil jedes Element x einer Gruppe G ein Linksinverses besitzt, folgt für alle $x, y, z \in G$ aus $xy = xz$ dann $y = x^{-1}xy = x^{-1}xz = z$. Also ist (a) richtig. Der Begriff Integritätsgruppe ist frei erfunden. ☺

2. Welche Aussage ist falsch? Eine Gruppe G ist abelsch genau dann, wenn

   (a) ihre Kommutatoruntergruppe gleich der trivialen Untergruppe ist.
   (b) ihr Zentrum gleich G ist.
   $\boxed{\text{(c)}}$ ein $x \in G$ existiert, so dass der Zentralisator von x gleich G ist.
   (d) für jedes $x \in G$ der Zentralisator von x gleich G ist.

   Erklärung: Der Zentralisator des neutralen Elements 1_G ist immer gleich G, aber nicht jede Gruppe ist abelsch. Also ist (c) falsch. Hingegen ist eine Gruppe G abelsch genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in G\colon\ xy = yx \ &\Longleftrightarrow\ Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G\colon\ xy = yx\} = G \ \Longleftrightarrow\ (b) \\
&\Longleftrightarrow\ \forall x, y \in G\colon\ xyx^{-1}y^{-1} = 1 \ \Longleftrightarrow\ [G, G] = \langle 1 \rangle \ \Longleftrightarrow\ (a) \\
&\Longleftrightarrow\ \forall x \in G\colon\ \mathrm{Cent}_G(x) = \{y \in G \mid xy = yx\} = G \ \Longleftrightarrow\ (d)
\end{aligned}$$

3. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}^\times$ ist keine Untergruppe von $(\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
   (c) $\mathbb{Q}^\times$
   (d) $\mathbb{Q}^{>0}$

   Erklärung: Wegen $(1+i)^2 = 2i$ ist die Menge in (a) nicht abgeschlossen unter der Multiplikation, sie kann also keine Untergruppe sein. Hingegen sind alle anderen Teilmengen Untergruppen.

4. Welche Ordnung hat die Restklasse [3] in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_{11}^{\times}$?

   (a) 1

   $\boxed{\text{(b)}}$ 5

   (c) 10

   (d) 11

   Erklärung: Es gilt $3^2 \equiv 9 \bmod 11$ und $3^3 \equiv 5 \bmod 11$ und $3^4 \equiv 4 \bmod 11$ und $3^5 \equiv 1 \bmod 11$. Also ist die Ordnung von $[3] \in \mathbb{F}_{11}^{\times}$ gleich 5.

5. Welche Aussage ist richtig? Für jede natürliche Zahl $n > 0$ existiert

   $\boxed{\text{(a)}}$ eine abelsche Gruppe der Ordnung n.

   (b) eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung n.

   (c) eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ der Ordnung n.

   (d) Alle obigen Aussagen sind richtig.

   Erklärung: Für jedes $n > 0$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe der Ordnung n, also ist (a) richtig. Hingegen ist jede nicht-triviale Untergruppe von $\mathbb{Z}$ unendlich, also ist (c) falsch. Für $n = 1$ gibt es nur die abelsche Gruppe $G = \{1_G\}$, und auch jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch und somit abelsch. Daher ist (b) falsch.