Musterlösung Single Choice Aufgaben 2

Homomorphismen, Normale Untergruppen, Faktorgruppen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Wieviele Elemente der Ordnung 2 gibt es in der Diedergruppe D_6?

   (a) 1

   (b) 6

   $\boxed{\text{(c)}}$ 7

   (d) 8

   Erklärung: Die Elemente in D_6 der Ordnung 2 sind genau die 6 Spiegelungen sowie die Drehung um den Winkel $\pi \mathrel{\hat{=}} 180°$.

2. Wieviele Automorphismen besitzt eine Gruppe von Primzahlordnung p?

   (a) 1

   $\boxed{\text{(b)}}$ $p-1$

   (c) p

   (d) $p+1$

   Erklärung: Jede Gruppe von Primzahlordnung p ist isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, also zur additiven Gruppe des endlichen Körpers $\mathbb{F}_p$. Jeder Automorphismus dieser Gruppe bildet das Erzeugende 1 auf ein eindeutiges Erzeugendes a ab und ist daher gegeben durch die Multiplikation mit a in $\mathbb{F}_p$. Das Erzeugende a muss dabei jedenfalls ungleich Null sein. Umgekehrt ist jedes von 0 verschiedene Element $a \in \mathbb{F}_p$ invertierbar und liefert daher einen Gruppenautomorphismus $x \mapsto ax$. Die gesuchte Anzahl ist daher $p-1$.

3. Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G. Welche Voraussetzung ist notwendig und hinreichend dafür, dass für jeden inneren Automorphismus von G die Einschränkung auf H ein Automorphismus von H ist?

   (a) Es gibt keine Voraussetzungen.

   (b) Die Gruppe G muss abelsch sein.

   (c) Es muss $H \subset Z(G)$ gelten.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Die Untergruppe H muss normal sein.

   Erklärung: Die inneren Automorphismen von G sind die Automorphismen der Form $x \mapsto \mathrm{int}_g(x) := gxg^{-1}$ für alle $g \in G$. All diese liefern Automorphismen von H genau dann, wenn $gHg^{-1} = H$ ist für alle $g \in G$, das heisst, wenn H normal ist. Diese Bedingung ist daher notwendig und hinreichend.

   Da im allgemeinen nicht jede Untergruppe normal ist, ist (a) falsch. Weiter ist die Untergruppe aller Drehungen in D_n normal, für $n \geqslant 3$ liegt sie aber nicht im Zentrum und D_n ist nicht abelsch. Also ist (b) bzw. (c) nicht zwingend notwendig.

4. Welche Aussage ist in jeder Gruppe richtig?

   (a) Jede Untergruppe von Ordnung 2 ist normal.

   (b) Jede Untergruppe von Primzahlindex ist normal.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jede Untergruppe von Index 2 ist normal.

   (d) Jede Untergruppe von Primzahlordnung ist normal.

   Erklärung: Wir wissen (c) aus der Vorlesung. Dagegen ist in der Diedergruppe D_3 die von einer Spiegelung erzeugte Untergruppe nicht normal und hat Ordnung 2 und Index 3. Dies ist also ein Gegenbeispiel zu (a), (b) und (d).

5. Welche Aussage gilt für jede Untergruppe $H < G$ und jede normale Untergruppe $N \lhd G$ einer Gruppe G?

   (a) $H/(H \cap N) \cong N/(H \cap N)$.

   (b) $G/H \cong (G/N)/(H/N)$ falls H normal ist.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $H/(H \cap N) \cong HN/N$.

   (d) $G/(H \cap N) \cong G/H \times G/N$ falls H normal ist.

   Erklärung: Der erste Isomorphiesatz gibt den natürlichen Isomorphismus in (c). Für jede nichttriviale Gruppe G ist $H = G$ und $N = \{1\}$ ein Gegenbeispiel zu (a). In (b) müsste zusätzlich $N \subset H$ voraussgesetzt werden; ansonsten ist H/N nicht definiert. In (d) ist jede nichttriviale endliche Gruppe G und $H = N = \{1\}$ ein Gegenbeispiel.