Musterlösung Single Choice Aufgaben 3

Operationen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Abbildungen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$ ist für jedes n eine Linksoperation der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $(A, M) \mapsto MA^{-1}$

   (b) $(A, M) \mapsto A^T M$

   (c) $(A, M) \mapsto A + M$

   (d) $(A, M) \mapsto A$

   Erklärung: Für beliebige $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ und $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$ gilt $(MB^{-1})A^{-1} = M(AB)^{-1}$; also ist (a) eine Linksoperation. In der Gleichung $A^T(B^T M) = (BA)^T M$ steht dagegen BA anstatt AB, darum ist (b) eine Rechtsoperation. Diese ist nur dann auch eine Linksoperation, wenn die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ kommutativ ist, was sie für $n > 1$ nicht ist. Schliesslich operiert die Einheitsmatrix in (c) und (d) nicht trivial, also haben wir dort keine Gruppenoperation. Somit ist nur (a) richtig.

2. Der Stabilisator der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$ bezüglich der Linksoperation

   $$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q}), \quad (A, M) \mapsto AM$$

   ist:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, b, d \in \mathbb{Q} \right\}$

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{Q} \wedge a + 2c = 1 \wedge b + 2d = 2 \wedge ad - bc \neq 0 \right\}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{Q},\ d \in \mathbb{Q}^\times \right\}$

   Erklärung: Für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2a & 4a \\ 2c & 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ genau dann, wenn $a = 1$ und $c = 0$ ist. Da wir den Stabilisator in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ wollen, brauchen wir zusätzlich die Bedingung $ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, also $d \neq 0$. Somit ist (d) die richtige Antwort. In (b) fehlt die Bedingung $d \neq 0$, und (c) ist der Stabilisator derselben Matrix für die Operation in Aufgabe 1.

3. Für eine Primzahl p betrachte die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant 1$ in $\mathbb{F}_p[X]$. Die additive Gruppe von $\mathbb{F}_p$ operiert darauf durch die Vorschrift $(a, f(X)) \mapsto f(X+a)$. Wieviele Bahnen besitzt diese Operation?

   (a) 1

   (b) p

   $\boxed{\text{(c)}}$ $2p-1$

   (d) p^2

   Erklärung: Jedes der p konstanten Polynome ist ein Fixpunkt der Operation, bildet also alleine eine Bahn. Dagegen hat für jedes $b \in \mathbb{F}_p^\times$ das Polynom bX die Bahn $\{\, b(X+a) \mid a \in \mathbb{F}_p \}$. Da b invertierbar ist, liegt schon jedes Polynom der Form $bX + c = b(X + c/b)$ in dieser Bahn; die Bahn ist also gleich $\{\, bX + c \mid c \in \mathbb{F}_p \}$. Die Anzahl der Bahnen von nichtkonstanten Polynomen ist daher die Anzahl der Möglichkeiten für $b \in \mathbb{F}_p^\times$ und somit gleich $p-1$. Die Gesamtzahl der Bahnen ist deshalb $p + (p-1) = 2p-1$.

4. Sei $H < G$ eine Untergruppe einer Gruppe G. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) $H \subset \mathrm{Cent}_G(\mathrm{Cent}_G(H))$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $H \subset \mathrm{Cent}_G(H)$

   (c) $\mathrm{Cent}_G(G) = Z(G)$

   (d) $Z(G) \subset \mathrm{Cent}_G(H)$

   Erklärung: Die Aussage (b) bedeutet, dass jedes Element von H im Zentralisator von H liegt, also mit jedem Element von H kommutiert. Sie ist daher äquivalent dazu, dass H abelsch ist, und ist somit im Allgemeinen falsch.

   Andererseits besagt die Definition des Zentralisators von H, dass $hx = xh$ ist für alle $h \in H$ und $x \in \mathrm{Cent}_G(H)$. Nach der Definition des Zentralisators von $\mathrm{Cent}_G(H)$ bedeutet dies genau die Inklusion in (a). Die Aussagen (c) und (d) folgen noch direkter aus den Definitionen des Zentralisators und des Zentrums.

5. Sei G eine endliche Gruppe, die von links auf einer Menge X operiert. Welche Aussage ist im Allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) $\forall g \in G\colon\ \forall x \in X\colon\ (gx = x \Rightarrow g = e)$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\forall g \in G\colon\ (\forall x \in X\colon\ gx = x) \Rightarrow g = e$

   (c) $\forall x \in X\colon\ G_x = \{e\}$

   (d) $\forall x \in X\colon\ |G| = |Gx|$

   Erklärung: Die Aussage (a) und (c) sind äquivalent nach Definition des Stabilisators eines Elements $x \in X$. Die Aussage (d) ist wegen der Bahnengleichungen äquivalent zu (c), also auch zu (a). Diese Aussagen sind genau die Definition einer freien Operation. Hingegen ist (b) äquivalent dazu, dass kein nichttriviales Element von G alle Elemente $x \in X$ festlässt, also dass die Operation treu ist. Weil z.B. die Multiplikation von $\mathbb{F}_5^\times$ auf $\mathbb{F}_5$ treu, aber nicht frei, operiert (der Stabilisator von 0 ist $\mathbb{F}_5^\times$), ist (b) nicht äquivalent zu den anderen Aussagen.