Musterlösung Single Choice Aufgaben 4

Symmetrische Gruppe

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Das Produkt der Permutationen $(1\ 2)(2\ 3\ 5)(4\ 3)(1\ 5\ 2) \in S_5$ ist gleich

   (a) $(5\ 4\ 3)$

   (b) $(3\ 4)(5\ 2)$

   (c) $(1\ 4\ 3\ 2\ 5)$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $(3\ 4\ 5)$

   Erklärung: Wir wenden die Zykel von rechts nach links (!) nacheinander an und erhalten

$$\begin{array}{c} 1 \mapsto 5 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 4 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 5 \\ 5 \mapsto 2 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 3 \end{array}$$

   Dies entspricht dem Element $(3\ 4\ 5)$ in S_5.

2. Wie viele Konjugationsklassen gibt es in S_4?

   (a) 2

   (b) 4

   $\boxed{\text{(c)}}$ 5

   (d) 12

   Erklärung: Die Anzahl Konjugationsklassen ist die Anzahl Partitionen einer 4-elementigen Menge. Diese sind genau $4 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$, also gibt es 5 Konjugationsklassen.

3. Für welche Untergruppe $H < S_4$ liegt die Transposition $(3\ 4) \in S_4$ *nicht* im Normalisator von H?

   (a) $H = A_4$

   (b) $H = \langle(1\ 2)\rangle \cong C_2$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\rangle \cong D_4$

   (d) $H = \langle(2\ 3\ 4), (2\ 3)\rangle \cong S_3$

   Erklärung: Die Transposition $(3\ 4)$ liegt genau dann im Normalisator von H, wenn $(3\ 4)H(3\ 4)^{-1} = H$ ist. In (c) folgt daraus $(3\ 4)(1\ 3)(3\ 4)^{-1} = (1\ 4) \in H$ und daraus weiter $(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 4) = (4\ 2\ 3) \in H$. Aber die D_4 hat Ordnung 8 und enthält daher kein Element der Ordnung 3. Also ist (c) die gesuchte Antwort.

   Dagegen liegt $(3\ 4)$ im Normalisator der A_4, weil diese schon in ganz S_4 normal ist. Sodann ist $(3\ 4)$ ein zu $(1\ 2)$ disjunkter Zykel, kommutiert also mit $(1\ 2)$ und liegt folglich im Normalisator von $\langle(1\ 2)\rangle$. Schliesslich liegt $(3\ 4) = (2\ 3)(2\ 3\ 4)$ bereits in der Untergruppe in (d), also insbesondere auch in deren Normalisator.

4. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

   (a) Drei beliebige verschiedene Transpositionen erzeugen die S_4.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Es existieren drei Transpositionen, welche die S_4 erzeugen.

   (c) Jede Transposition und jeder 3-Zykel zusammen erzeugen die S_4.

   (d) Jede Transposition und jeder 4-Zykel zusammen erzeugen die S_4.

   Erklärung: Die Transpositionen $(1\ 2)$ und $(2\ 3)$ und $(3\ 4)$ erzeugen die S_4; darum ist (b) richtig. Dagegen sind die Transpositionen $(1\ 2)$ und $(2\ 3)$ und $(1\ 3)$ paarweise verschieden, lassen jedoch alle die Ziffer 4 fest; darum lässt auch die davon erzeugte Untergruppe die Ziffer 4 fest und ist daher eine echte Untergruppe der S_4. Das gleiche Argument gilt für die von der Transposition $(1\ 2)$ und dem 3-Zykel $(1\ 2\ 3)$ erzeugte Untergruppe. Schliesslich erzeugen die Transposition $(1\ 3)$ und der 4-Zykel $(1\ 2\ 3\ 4)$ zusammen eine echte Untergruppe der Ordnung 8.

5. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

   (a) Das Produkt einer geraden Anzahl von Zykeln ist immer in A_n enthalten.

   (b) Die A_n wird von allen Produkten dreier Transpositionen erzeugt.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Kleinsche Vierergruppe ist in A_4 enthalten.

   (d) Die Kleinsche Vierergruppe ist zyklisch.

   Erklärung: Die Kleinsche Vierergruppe $\{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ enthält ausschlieslich gerade Elemente und ist darum in der A_4 enthalten. Also ist (c) richtig.

   Das Produkt eines beliebigen 1-Zykels mit einem beliebigen 2-Zykel ist ungerade; darum ist (a) falsch. Das Produkt dreier Transposition ist immer ungerade und damit nicht in der A_n enthalten; also ist (b) falsch. Das Quadrat eines beliebigen Elements der Kleinschen Vierergruppe ist die Identität; darum ist (d) falsch.