Musterlösung Single Choice Aufgaben 5

Freie Gruppen, Erzeugende & Relationen, Ringe

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei I eine endliche Menge. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Die Abelisierung einer freien Gruppe über I ist eine freie abelsche Gruppe über I.

   (b) Je zwei freie Gruppen über I sind isomorph.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Eine freie Gruppe über I kann nicht zu einer freien abelschen Gruppe über I isomorph sein.

   (d) Es existiert ein natürlicher surjektiver Homomorphismus $F_I \twoheadrightarrow F_I^{\text{ab}}$.

   Erklärung: Die Aussage (b) wurde in der Vorlesung bewiesen. Die Korrektheit von (a) wurde in Aufgabe 3 (a) von Serie 5 gezeigt, und daraus folgt auch der natürliche surjektive Homomorphismus $F_I \twoheadrightarrow F_I/[F_I, F_I] \cong F_I^{\text{ab}}$.

   Dagegen ist (c) falsch, wenn die freie Gruppe F_I schon abelsch ist. Dies ist der Fall für $|I| = 1$ wegen $F_1 \cong \mathbb{Z}$ und für $|I| = 0$ wegen $F_0 = 1$.

2. Welche durch Erzeugende und Relationen definierte Gruppe ist *nicht* isomorph zur D_4?

   (a) $G_1 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^4 = 1\rangle$

   (b) $G_2 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = xyxy = 1\rangle$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $G_3 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1\rangle$

   (d) $G_4 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$

   Erklärung: In (d) steht die übliche Präsentation der D_4 mit der Drehung x und der Spiegelung y. Wegen $y^2 = 1$ ist die letzte Gleichung in (d) äquivalent zu der letzten Gleichung in (b); darum ist auch diese Gruppe isomorph zur D_4. Sodann wurde in der Vorlesung besprochen, dass auch (a) die D_4 liefert, nämlich mit den zwei Spiegelungen x und y und der Drehung xy.

   Für (c) beachten wir, dass $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1\rangle$ die unendliche Diedergruppe ist. Da $x^4 = 1$ aus $x^2 = 1$ folgt, ist diese ein Quotient der Gruppe in (c). Letztere ist daher auch unendlich und damit sicher nicht isomorph zur D_4.

3. Welche Aussage ist richtig für jeden Ring R und jedes Element $x \in R^\times$?

   (a) $\forall y \in R\colon\ y \cdot x \in R^\times$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $x^2 \in R^\times$

   (c) $x - 1 \in R^\times$

   (d) $\forall y \in R\ \exists z \in R\colon\ y \cdot z = x.$

   Erklärung: Im Fall $R \neq 0$ liefert $y = 0$ ein Gegenbeispiel zu (a) und (d), und $x = 1$ eines zu (c). Hingegen ist das Produkt zweier Elemente aus $R^\times$ wieder in $R^\times$, also ist (b) richtig.

4. Sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) $\varphi(1_R) = 1_S$

   (b) $\varphi(0_R) = 0_S$

   (c) $\forall x \in R\colon \varphi(x + 5 \cdot 1_R) = \varphi(x) + 5 \cdot 1_S$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\varphi(R^\times) = S^\times$

   Erklärung: Für die Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ wird (d) falsch wegen $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ und $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die übrigen Aussagen folgen aus der Definition eines Homomorphismus.

5. Welche Aussage gilt für alle Körper K und L?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Jeder Ringhomomorphismus $K \to L$ ist injektiv.

   (b) Jeder Ringhomomorphismus $K \to L$ ist surjektiv.

   (c) Jeder Unterring von K ist ein Körper.

   (d) Jeder Oberring von K ist ein Körper.

   Erklärung: Aussage (a) wurde in der Vorlesung gezeigt. Sodann ist (b) falsch für die Einbettung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, und (c) ist falsch für den Unterring $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Schliesslich ist (d) falsch für die Einbettung von K in den Polynomring $K[X]$.