Musterlösung Single Choice Aufgaben 6

Ringe, Unterringe, Körper, Polynomringe

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Wieso wird in der Definition eines Unterringes $R' \subset R$ nicht verlangt, dass $0 \in R'$ ist?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Weil dies aus den anderen Axiomen folgt.

   (b) Weil dies nicht der Fall sein muss.

   (c) Weil R nicht unbedingt ein Nullelement 0 besitzt.

   (d) Es wird verlangt, Prof. Pink hat dies in der Vorlesung aber leider vergessen.

   Erklärung: Weil $1 \in R'$ ist, ist $-1 \in R'$ und daher auch $0 = 1 + (-1) \in R'$, also ist (a) richtig.

2. Welcher Unterring von $\mathbb{R}$ ist nicht gleich den anderen?

   (a) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$

   (b) $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$

   (c) $\mathbb{Z}[\frac{1}{12}]$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\mathbb{Z}[\frac{1}{30}]$

   Erklärung: Die Erzeugenden der Ringe in (a) bis (c) sind rationale Zahlen, die 5 nicht im Nenner haben. Also gilt dasselbe für alle Elemente dieser Ringe. Insbesondere ist $6 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{5}$ nicht darin enthalten; somit ist Antwort (d) korrekt.

3. Welche Aussage ist im Allgemeinen *korrekt*?

   (a) Jeder Ring ist auch ein Körper.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Jeder Körper ist auch ein Ring.

   (c) Es existiert ein Körper K, dessen multiplikative Gruppe $K^\times$ isomorph zu D_4 ist.

   (d) In allen Ringen gilt $1 \neq 0$.

   Erklärung: Jeder Körper erfüllt nach Definition auch die Ringaxiome und ist somit auch ein Ring, also ist (b) korrekt. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind ein Beispiel für einen Ring, der kein Körper ist. Somit ist (a) falsch. Die multiplikative Gruppe eines Körpers ist abelsch, die Gruppe D_4 aber nicht, womit (c) falsch ist. Die Nichttrivialität $1 \neq 0$ ist Axiom (9) aus der Vorlesung, welches wir für Ringe nicht verlangen. Damit ist auch (d) falsch.

4. Welcher Unterring von $\mathbb{Q}[X]$ ist verschieden von den anderen?

   (a) $\mathbb{Q}[X]$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbb{Q}[X^2, X^3]$

   (c) $\mathbb{Q}[X^2 + 1, (X + 1)^2]$

(d) $\mathbb{Q}[X^3 - X, X^3 + 1]$

Erklärung: Das Element $X = \frac{1}{2}(X+1)^2 - \frac{1}{2}(X^2+1)$ liegt in dem Unterring in (c), und das Element $X = (X^3+1) - (X^3 - X) - 1$ in dem Unterring in (d). Also sind diese Unterringe gleich $\mathbb{Q}[X]$. Hingegen hat jedes Monom in X^2 und X^3 die Form $a(X^2)^i(X^3)^j = aX^{2i+3j}$ mit $a \in \mathbb{Q}$, wobei der Exponent nie gleich 1 sein kann. Auch durch $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen kann man daher das Monom X nicht erreichen, weshalb dieses nicht in $\mathbb{Q}[X^2, X^3]$ enthalten ist. Somit ist der Unterring in (b) verschieden von $\mathbb{Q}[X]$.

5. Welcher der folgende Ausdrücke ist ein Polynom in $\mathbb{F}_5[X]$?

$\boxed{\text{(a)}}$ $\sum_{n \geqslant 0} n! \cdot x^n$

(b) $\sum_{n \geqslant 0} x^{n!}$

(c) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$

(d) $\sum_{n \geqslant 0} (n - n^{20}) \cdot x^n$

Erklärung: Für alle $n \geqslant 5$ ist $n!$ durch 5 teilbar, darum verschwinden fast alle Terme in (a) und der Ausdruck definiert ein Polynom. Aus dem gleichen Grund tritt 5 in (c) im Nenner auf und der Ausdruck ist gar nicht definiert. Sodann sind in (b) unendlich viele Koeffizienten ungleich Null. Das Gleiche gilt für (d), denn für alle $n \equiv -1 \mod (5)$ ist $n - n^{20} \equiv -1 - (-1)^{20} \equiv -2 \not\equiv 0 \mod (5)$. Darum stehen in (b) und (d) zwar Potenzreihen in $\mathbb{F}_5[[X]]$, aber keine Polynome.