Musterlösung Single Choice Aufgaben 7

Polynomringe, Matrizen, Integritätsbereiche

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welches ist *kein* Grund, weshalb man ein Polynom nicht mit seiner Polynomfunktion identifizieren darf?

   (a) Über endlichen Ringen können verschiedene Polynome dieselbe Polynomfunktion darstellen.

   (b) Polynome kann man über einem grösseren Ring auswerten.

   (c) In Polynome kann man auch Matrizen einsetzen.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Nicht jede Polynomfunktion kann als Polynom ausgedrückt werden.

   Erklärung: Nach Definition sind Polynomfunktionen genau diejenigen Funktionen, deren Zuordnungsvorschriften durch Polynome ausgedrückt werden können. Also ist (d) falsch.

2. Welche der folgenden 2×2-Matrizen ist invertierbar über $\mathbb{Z}$?

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Erklärung: Eine quadratische Matrix über einem Ring R ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante eine Einheit ist. Im vorliegenden Fall sind die Determinanten $0, -1, -2, 2$. Davon ist nur die zweite eine Einheit in $\mathbb{Z}$; also ist nur (b) die richtige Antwort.

3. Betrachte die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Menge $R := \{a \cdot I_2 + b \cdot A \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Matrixaddition und -multiplikation. Wieso ist R kein Integritätsbereich?

   (a) Weil R kein Ring ist.

   (b) Weil der Matrixring $\{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{Q}\}$ kein Integritätsbereich ist.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Weil das Minimalpolynom von A in zwei Linearfaktoren zerfällt.

   (d) Weil A invertierbar ist.

   Erklärung: Die Menge R bildet einen unitären kommutativen Ring, also ist (a) nicht die richtige Antwort. Sodann kann zwar das Produkt zweier von Null verschiedener Matrizen die Nullmatrix sein, aber dennoch ist der Unterring $\{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{Q}\}$ isomorph zu $\mathbb{Q}$ und deshalb ein Integritätsbereich. Daher ist auch (b) nicht die richtige Antwort. Wenn wir ausserdem A durch die Einheitsmatrix I_2 ersetzen, die ja invertierbar ist, wird R wieder gleich $\{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{Q}\}$; somit ist auch (d) nicht korrekt.

   Dagegen ist das Minimalpolynom von A gleich $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Wegen Cayley-Hamilton gilt also $(A - I_2)(A + I_2) = 0$ mit den Faktoren $A \pm I_2 \neq 0$. Deswegen ist R kein Integritätsbereich und (c) die richtige Antwort.

4. Sei R ein Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) Sei $G \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ ein Nullteiler. Dann ist jeder Koeffizient von G entweder 0 oder ein Nullteiler von R.

   (b) Für jeden Nullteiler $x \in R$ gilt: $\forall y \in R \;\Rightarrow\; xy = 0$.

   (c) Das Produkt zweier Nullteiler ist stets ein Nullteiler.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Seien $x, y \in R$ keine Nullteiler. Dann ist auch ihr Produkt xy kein Nullteiler.

   Erklärung: Für $R = \mathbb{Q}$ und $n = 2$ ist $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = O_2$. Also ist $G := \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ ein Nullteiler, hat aber einen Koeffizienten, der eine Einheit ist. Demnach ist (a) falsch. Sodann ist nach Definition jeder Nullteiler $x \neq 0$. Also ist $x \cdot 1 = x \neq 0$, daher ist auch (b) falsch. Weiter existiert für jeden Nullteiler $x \in R \smallsetminus \{0\}$ ein $y \in R \smallsetminus \{0\}$ mit $xy = 0$. Dieses y ist dann ebenfalls ein Nullteiler, aber das Produkt $xy = 0$ nicht, also ist (c) falsch.

   Seien nun $x, y \in R$ keine Nullteiler. Wenn x oder y gleich 0 ist, so ist auch $xy = 0$ und somit kein Nullteiler. Andernfalls betrachte ein beliebiges $z \in R \smallsetminus \{0\}$. Da $y \in R \smallsetminus \{0\}$ kein Nullteiler ist, muss dann $yz \neq 0$ sein. Da $x \in R \smallsetminus \{0\}$ kein Nullteiler ist, folgt daraus auch $(xy)z = x(yz) \neq 0$. Daher ist xy kein Nullteiler und (d) korrekt.

5. Sei R ein von Null verschiedener Ring. Welche der folgenden Aussagen ist nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) Der Ring R ist ein Integritätsbereich.

   (b) In R gilt die Kürzungsregel: $\forall x, y, z \in R\colon\; xy = xz \;\wedge\; x \neq 0 \;\Rightarrow\; y = z$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ In R gilt die Einheitenregel: $\forall x, y \in R\colon\; x \in R^\times \;\wedge\; y \neq 0 \;\Rightarrow\; xy \in R^\times$.

   (d) Der Ring R besitzt keine Nullteiler.

   Erklärung: Aussage (d) zusammen mit $R \neq 0$ ist die Definition von (a). Diese impliziert (b) nach einem Satz der Vorlesung, und umgekehrt impliziert (b) für den Fall $z = 0$ die Bedingung (d). Also sind alle Aussagen ausser (c) zueinander äquivalent.

   Dagegen impliziert (c) für $x = 1$, dass jedes Element $y \in R \smallsetminus \{0\}$ invertierbar ist, also R ein Körper ist. Da es Integritätsbereiche gibt, die keine Körper sind, wie zum Beispiel $\mathbb{Z}$, ist daher (c) nicht äquivalent zu (a).