Musterlösung Single Choice Aufgaben 8

Ideale, Faktorringe, Primideale

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welches Ideal von $\mathbb{Q}[X,Y]$ ist nicht gleich den anderen?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $(X,\ Y^2 - X^2)$

   (b) $(Y - X,\ X^2)$

   (c) $(Y - X,\ X^2 + Y^2)$

   (d) $(Y - X,\ X^2,\ X^2 + Y^2)$

   Erklärung: Wegen

   $$\begin{aligned} Y^2 + X^2 &= 2X^2 + (Y+X)\cdot(Y-X) \qquad \text{und} \\ X^2 &= \tfrac{1}{2}(X^2+Y^2) - \tfrac{1}{2}(Y+X)\cdot(Y-X) \end{aligned}$$

   können wir das zweite Erzeugende in (b) durch das zweite Erzeugende in (c) ersetzen und umgekehrt; darum sind diese Ideale gleich und auch gleich dem in (d). Wären diese auch gleich dem Ideal in (a), so wäre $X \in (Y - X, X^2)$. Dann existierten $f, g \in \mathbb{Q}[X,Y]$ mit $X = f \cdot (Y - X) + g \cdot X^2$. Durch Einsetzen von X für die Variable Y erhielten wir dann die Gleichung $X = g(X,X) \cdot X^2$ in $\mathbb{Q}[X]$, die aber unmöglich ist. Somit ist das Ideal in (a) verschieden von den übrigen.

2. Welche Aussage gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eines Rings R und jedes $n \geqslant 2$?

   (a) Es gilt $\mathfrak{a}^n = \{a^n \mid a \in \mathfrak{a}\}$.

   (b) Falls $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ ist, so gilt $\mathfrak{a}^n = (a_1^n, \ldots, a_m^n)$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Das Ideal $\mathfrak{a}^n$ ist von allen Produkten $a_1 \cdots a_n$ erzeugt für $a_i \in \mathfrak{a}$.

   (d) Das Ideal $\mathfrak{a}^n$ ist von allen $a \in R$ mit $a^n \in \mathfrak{a}$ erzeugt.

   Erklärung: Aus der Definition des Produkts von Idealen folgt, dass (c) die richtige Antwort ist. Die Teilmenge in (a) ist dagegen im Allgemeinen weder unter Addition noch skalaren Vielfachen abgeschlossen, wie zum Beispiel für $a = 2$ in $R = \mathbb{Z}$. Dies liefert auch ein Gegenbeispiel zu (d), worin die Rollen von a und a^n vertauscht sind. Ein Gegenbeispiel zu (b) findet sich im Ring $\mathbb{Q}[X,Y]$ mit dem Ideal $\mathfrak{a} = (X,Y)$ und $n = 2$, denn dort ist $XY \in \mathfrak{a}^2$, aber $XY \notin (X^2, Y^2)$.

3. Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig?

   (a) $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist ein Ideal von S.

   (b) $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist kein Ideal von S.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist ein Ideal von R.

   (d) $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist kein Ideal von R.

   Erklärung: In der Vorlesung wurde (c) bewiesen und damit (d) widerlegt. Das Bild der identischen Abbildung $R \to R$ ist das Einsideal $R = (1)$, darum ist (b) falsch. Schliesslich ist das Bild der Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ kein Ideal, somit ist auch (a) falsch.

4. Welche Isomorphie gilt nicht?

   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \;\cong\; \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2)$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbb{Z}[i] \;\cong\; \mathbb{Z}[X]/(X^4 - 1)$

   (c) $\mathbb{Z}[\frac{1}{5}] \;\cong\; \mathbb{Z}[X]/(5X - 1)$

   (d) $\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}[X]/(X - 1)$

   Erklärung: Die Isomorphie in (b) ist falsch, denn: Das Polynom $X^4 - 1 = (X - 1) \cdot (X^3 + X^2 + X + 1)$ ist nicht irreduzibel, also ist $(X^4 - 1)$ kein Primideal, und somit der Faktorring $\mathbb{Z}[X]/(X^4 - 1)$ kein Integritätsbereich, wohingegen $\mathbb{Z}[i]$ ein Integritätsbereich ist.

5. Sei R ein Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig?

   (a) Es existiert ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ und eine Einheit $p \in R^\times$, sodass $p \in \mathfrak{p}$.

   (b) Die leere Menge ist ein Primideal von R.

   (c) Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist $(p) \subset \mathbb{N}$ ein Primideal.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Für jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ ist $(p) \subset \mathbb{Z}$ ein Primideal.

   Erklärung: Wenn ein Ideal eine Einheit enthält, ist es nach Proposition 2.9.5 das Einsideal, welches kein echtes Ideal und damit kein Primideal ist. Also ist (a) falsch. Per Definition sind Ideale nicht leer, also ist Aussage (b) ebenfalls falsch. Die natürlichen Zahlen bilden keinen Ring, dementsprechend ist Aussage (c) falsch. Für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ und beliebige $x, y \in \mathbb{Z}$ ist $xy \in (p)$ äquivalent zu $p|xy$. Da p eine Primzahl ist, folgt daraus $p|x$ oder $p|y$, was äquivalent zu $x \in (p)$ oder $y \in (p)$ ist.