1.10 Operationen

1.10.1 Definition: Eine *Operation von links* oder kurz *Linksoperation* (englisch *left action*) von G auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$\sigma\colon G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto \sigma(g,x)$$

mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \forall g, g' \in G\ \forall x \in X\colon &\quad \sigma(g,\sigma(g',x)) = \sigma(gg',x) \quad \text{(Assoziativität)} \\ \forall x \in X\colon &\quad \sigma(1_G, x) = x \quad \text{(Neutrales Element)} \end{aligned}$$

1.10.2 Proposition: Jede Linksoperation σ von G auf X entspricht einem Homomorphismus $\varphi\colon G \to S(X)$ vermöge $\sigma(g,x) = \varphi(g)(x)$, und umgekehrt.

$S(X)$ = Gruppe aller bij. Abb. $X \to X$.

Bew.: φ Homo $\Rightarrow \sigma(g,\sigma(g',x)) = \varphi(g)(\varphi(g')(x)) = (\varphi(g)\circ\varphi(g'))(x) \overset{!}{=} \varphi(gg')(x) = \sigma(gg',x)$.

$\varphi(1_G) = \mathrm{id}_X \Rightarrow \sigma(1_G, x) = \varphi(1_G)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$.

σ Operation $\Rightarrow$ Definiere für jedes $g \in G$ die Abb. $\varphi(g)\colon X \to X,\ x \mapsto \sigma(g,x)$.

Rechne: $\forall g, g' \in G\colon\ \varphi(g)\circ\varphi(g') = \varphi(gg')$. $\Rightarrow$ Homo.

$$\forall g \in G\colon \left.\begin{aligned} &\varphi(g)\circ\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(1_G) = \mathrm{id}_X \\ &\varphi(g^{-1})\circ\varphi(g) = \dots = \mathrm{id}_X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(g) \in S(X).$$

q.e.d.

1.10.3 Definition: Eine *Operation von rechts* oder kurz *Rechtsoperation* (englisch *right action*) von G auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$\rho\colon X \times G \to X, \quad (x, g) \mapsto \rho(x, g)$$

mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \forall g, g' \in G\ \forall x \in X: &\quad \rho(\rho(x,g),g') = \rho(x, gg') &\quad \text{(Assoziativität)} \\ \forall x \in X: &\quad \rho(x, 1_G) = x &\quad \text{(Neutrales Element)} \end{aligned}$$

1.10.4 Proposition: Jede Linksoperation σ entspricht einer Rechtsoperation ρ, und umgekehrt, vermittels der Gleichung $\sigma(g, x) = \rho(x, g^{-1})$.

Beweis: $\sigma(g, \sigma(g', x)) = \rho(\rho(x, g'^{-1}), g^{-1}) = \rho(x, g'^{-1} g^{-1})$

$= \rho(x, (gg')^{-1}) = \sigma(gg', x)$.

qed

$G \times G \to G$ $\qquad$ $g(g'x) = (gg')x$, $\mathrm{id}_G \cdot x = x$.

1.10.5 Beispiel: (a) Die *Linkstranslation* von G auf G durch $\sigma(g, x) := gx$ ist eine Linksoperation.

(b) Die *Rechtstranslation* von G auf G durch $\rho(x, g) := xg$ ist eine Rechtsoperation. Die ihr zugeordnete Linksoperation ist $\sigma(g, x) := xg^{-1}$.

(c) Die *Konjugation* von G auf G durch $\sigma(g, x) := {}^g x = gxg^{-1}$ ist eine Linksoperation. Die ihr zugeordnete Rechtsoperation ist $\rho(x, g) := g^{-1}xg$.

1.10.6 Konvention: Oft schreibt man auch eine allgemeine Linksoperation in der Form $\sigma(g, x) = gx$ oder $\sigma(g, x) = {}^g x$, wenn Verwechslungen unwahrscheinlich erscheinen.

Bsp.: $H < G \rightsquigarrow G \times G/H \to G/H$, $(g, g'H) \mapsto gg'H$.

Linksoperation.

Bsp.: $X :=$ Menge aller UGn. von G

$G \times X \to X$, $(g, H) \mapsto {}^g H$

1.10.7 Bemerkung: Oft will man, dass eine Operation mit Zusatzstrukturen auf X verträglich ist, das heisst, dass für jedes $g \in G$ die Abbildung $X \to X$, $x \mapsto gx$ mit diesen Zusatzstrukturen verträglich ist, oder äquivalent dass der Homomorphismus $G \to S(X)$ durch die Untergruppe aller strukturerhaltenden Automorphismen von X faktorisiert.

1.10.8 Beispiel: Sei H eine weitere Gruppe. Ein Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ entspricht einer Linksoperation σ von G auf der Menge H mit der weiteren Eigenschaft

$$\forall g \in G\ \forall h, h' \in H\colon\ \sigma(g, hh') = \sigma(g, h)\sigma(g, h'),$$

$\Leftrightarrow \varphi(g)(hh') = \varphi(g)(h) \cdot \varphi(g)(h')$

genannt eine *Linksoperation von G auf der Gruppe H*.

1.10.9 Beispiel: Sei V ein K-Vektorraum. Ein Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ entspricht einer Linksoperation σ von G auf der Menge V mit den weiteren Eigenschaften

$$\begin{aligned} \forall g \in G\ \forall v, v' \in V\colon &\quad \sigma(g, v + v') = \sigma(g, v) + \sigma(g, v'), \\ \forall g \in G\ \forall v \in V\ \forall \lambda \in K\colon &\quad \sigma(g, \lambda v) = \lambda \cdot \sigma(g, v). \end{aligned}$$

Eine solche Linksoperation heisst *K-linear* oder eine *Darstellung von G auf V*.

1.11 Bahnen

Sei $(g, x) \mapsto gx$ eine Linksoperation von G auf einer Menge X.

1.11.1 Definition: Die *Bahn* (englisch *orbit*) eines Elements $x \in X$ ist die Teilmenge

$$O_G(x) \;:=\; Gx \;:=\; \{gx \mid g \in G\} \;\subset\; X.$$

1.11.2 Proposition: Für alle $x, x' \in X$ gilt

$$Gx = Gx' \iff x \in Gx' \iff x' \in Gx \iff Gx \cap Gx' \neq \varnothing.$$

Insbesondere ist X die disjunkte Vereinigung aller Bahnen von G.

Bew.: $x \in Gx'$ $\longrightarrow$ schreibe $x = gx'$ für ein $g \in G$

$\longrightarrow$ $Gx' = Ggx = Gx$

Rest analog. qed.

1.11.3 Definition: Der *Stabilisator* eines Elements $x \in X$ ist die Untergruppe

$$\mathrm{Stab}_G(x) := G_x := \{g \in G \mid gx = x\} < G.$$

Bew.: $1_G x = x \Rightarrow 1_G \in G_x$

$g, g' \in G_x \Rightarrow gg'x = gx = x \Rightarrow gg' \in G_x$.

$g^{-1}x = g^{-1}gx = 1_G x = x$

$\Rightarrow g^{-1} \in G_x \Rightarrow G_x < G$. qed.

1.11.4 Proposition: Für alle $x \in X$ und $g \in G$ gilt $G_{gx} = {}^gG_x$.

Bew.: $g' \in G_{gx} \Leftrightarrow g'gx = gx \Leftrightarrow g^{-1}g'gx = x \Leftrightarrow g^{-1}g'g \in G_x \Leftrightarrow g' \in gG_xg^{-1} = {}^gG_x$ qed.

1.11.5 Proposition: Für jedes $x \in X$ haben wir eine natürliche Bijektion

$$G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx, \; gG_x \mapsto gx.$$

Insbesondere gelten die *Bahnengleichungen*

$$[G : G_x] = |Gx|,$$
$$|G| = |G_x| \cdot |Gx|,$$
$$|X| = \textstyle\sum_{x\in\mathcal{R}} [G : G_x],$$

für jedes Repräsentantensystem $\mathcal{R} \subset X$ aller Bahnen von G.

Bew.: $gG_x = g'G_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists h \in G_x : g' = gh$

$\Rightarrow g'x = ghx = gx$

⇝ Abb. wohldefiniert.

surjektiv ✓

Sei $gx = g'x \Rightarrow g^{-1}g'x = x$

$\Rightarrow g^{-1}g' \in G_x \Rightarrow g' \in gG_x$

$\Rightarrow g'G_x = gG_x$

$\Rightarrow$ injektiv $\Rightarrow$ bijektiv.

qed.

$[G : G_x] \overset{\text{def.}}{=} |G/G_x| = |Gx|$.

$|G| = |G_x| \cdot [G : G_x]$

Lagrange

$X = \coprod_{x \in R} Gx$

$|X| = \sum_{x \in R} |Gx|$.

1.11.6 Definition: Ein Element $x \in X$ mit $Gx = \{x\}$, oder äquivalent $G_x = G$, heisst ein *Fixpunkt von G*. Die Menge aller Fixpunkte von G wird bezeichnet mit X^G.

1.11.7 Beispiel-Definition: Betrachte die Linksoperation von G auf sich durch Konjugation. Die Bahn eines Elements $x \in G$

$$O_G(x) \ := \ \{{}^g x \mid g \in G\}$$

heisst die *Konjugationsklasse von x*. Der Stabilisator von x ist genau der Zentralisator $\mathrm{Cent}_G(x)$. Die Menge der Fixpunkte von G ist das Zentrum $Z(G)$.

$\{x \in X \mid \forall g \in G: {}^g x = x\}$ $\quad gx = xg$

1.11.8 Beispiel: Die Konjugationsklassen in $\mathrm{GL}_n(K)$ sind genau die Ähnlichkeitsklassen invertierbarer Matrizen.

1.11.9 Beispiel-Definition: Betrachte die Linksoperation von G auf der Menge aller Untergruppen von G durch Konjugation $(g, H) \mapsto {}^gH$. Die Fixpunkte dieser Operation sind genau die normalen Untergruppen von G. Der Stabilisator einer beliebigen Untergruppe H heisst der *Normalisator von H*:

$$\mathrm{Norm}_G(H) \;:=\; \{g \in G \mid {}^gH = H\}.$$

1.11.10 Definition: Der *Zentralisator* einer Untergruppe $H < G$ ist die Untergruppe

$$\mathrm{Cent}_G(H) \;:=\; \{g \in G \mid \forall h \in H\colon {}^gh = h\}. \quad = \bigcap_{h \in H} \mathrm{Cent}_G(h).$$

1.11.11 Proposition: Für jedes $H < G$ gilt $H \lhd \mathrm{Norm}_G(H)$ und $\mathrm{Cent}_G(H) \lhd \mathrm{Norm}_G(H)$.

Bew.: $\forall h \in H: {}^hH = hHh^{-1} = H \Rightarrow h \in \mathrm{Norm}_G(H)$, $\Rightarrow H < \mathrm{Norm}_G(H) \Rightarrow H \lhd \mathrm{Norm}_G(H)$

$\forall g \in \mathrm{Cent}_G(H): {}^gH = H \Rightarrow \mathrm{Cent}_G(H) < \mathrm{Norm}_G(H)$

$\forall n \in \mathrm{Norm}_G(H): \forall h \in H: {}^{ngn^{-1}}h = {}^n(g({}^{n^{-1}}h)) = {}^n({}^{n^{-1}}(h)) = h \Rightarrow ngn^{-1} \in \mathrm{Cent}_G(H) \Rightarrow \mathrm{Cent}_G(H) \lhd \mathrm{Norm}_G(H)$ qed

1.11.12 Beispiel: Sei $T < \mathrm{GL}_n(K)$ die Untergruppe aller Diagonalmatrizen. Ist $|K| > 2$, dann ist $N := \mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_n(K)}(T)$ die Gruppe aller *monomialen* Matrizen, das heisst all solcher, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben. Das sind genau die Matrizen, welche ein Produkt einer Diagonalmatrix mit einer Permutationsmatrix sind.

$A \in T \Rightarrow A \in N$, $t = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \in T$

A Permutationsmatrix, $A = (\delta_{i,\sigma j})_{i,j}$, $\sigma \in S_n$. $\Bigg\} \Rightarrow At = (\delta_{i,\sigma j} \cdot t_j)_{i,j}$, $A^{-1} = (\delta_{k,\sigma j})_{j,k}$

$\Rightarrow AtA^{-1} = \Big(\sum_j \delta_{i,\sigma j} \cdot t_j \cdot \delta_{k,\sigma j} \Big)_{i,k}$

$= \left(\begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ t_j & \text{falls } i = k = \sigma j \end{cases} \right)$

$= (\delta_{ij} \cdot t_{\sigma^{-1} i})_{i,j}$. $\Rightarrow A \in N$

1.12 Eigenschaften von Operationen

1.12.1 Definition: Eine Operation von G auf X heisst

(a) *transitiv*, wenn sie genau eine Bahn besitzt.
Äquivalent: Es ist $X \neq \varnothing$ und $\forall x, x' \in X\ \exists g \in G\colon\ gx = x'$.

(b) *frei*, wenn gilt $\forall x \in X\colon G_x = \{1\}$.
Äquivalent: $\forall x \in X\ \forall g \in G \smallsetminus \{1\}\colon\ gx \neq x$.

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \forall x \in X : gx = x\} = \bigcap_{x \in X} G_x$

(c) *treu*, wenn gilt $\bigcap_{x\in X} G_x = \{1\}$.
Äquivalent: Der entsprechende Homomorphismus $\varphi\colon G \to S(X)$ ist injektiv.

(d) *trivial*, wenn gilt $\forall g \in G\ \forall x \in X\colon gx = x$.
Äquivalent: Der entsprechende Homomorphismus $G \to S(X)$ ist trivial.

$\forall g, g' \in G:$
$(g'g^{-1})g = g'$

1.12.2 Beispiel: Die Linkstranslation von G auf sich ist transitiv und frei und treu.

1.12.3 Beispiel: Für jede Untergruppe $H < G$ haben wir eine transitive Linksoperation

$$G \times G/H \to G/H,\ (g, g'H) \mapsto gg'H.$$

Der Stabilisator der trivialen Nebenklasse ist in diesem Fall $\mathrm{Stab}_G(H) = H$.

$\quad\|$
$\{g \in G \mid gH = H\}$

1.13 Symmetrische Gruppe

1.13.1 Definition: Die Gruppe S_n aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ heisst die *symmetrische Gruppe vom Grad n.* Ihre Elemente bezeichnet man meist mit kleinen griechischen Buchstaben und schreibt ihre Operation klammernlos in der Form $\sigma\colon i \mapsto \sigma i$.

1.13.2 Proposition: Es gilt $|S_n| = n!$. $= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$

1.13.3 Satz: *(Cayley)* Jede endliche Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer S_n.

Bew.: Die Linksop. von G auf sich ist ein inj. Homo $G \to S(G)$. $\cong S_n$. qed.
$|G| = n$

1.13.4 Definition: Ein Paar (i, j) mit $1 \leqslant i < j \leqslant n$ und $\sigma i > \sigma j$ heisst ein *Fehlstand von σ.* Die Zahl

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \;:=\; (-1)^{\text{Anzahl Fehlstände von } \sigma} \in \{\pm 1\}.$$

heisst das *Signum* oder die *Signatur* oder das *Vorzeichen von σ*. Eine Permutation mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ heisst *gerade*, eine mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ heisst *ungerade.*

$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$.

1.13.5 Proposition: Die Abbildung $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

1.13.6 Definition: Der Kern von $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ heisst die *alternierende Gruppe A_n*.

$n \leq 1 \Rightarrow A_n = S_n$.

1.13.7 Proposition: Für alle $n \geqslant 2$ gilt $[S_n : A_n] = 2$ und $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

$S_n / A_n \cong \{\pm 1\}$.

$\sigma: 1 \to 2 \to 1$, alle andern fest $\Rightarrow$ Fehlstand $(1,2) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. $\Rightarrow$ sgn surjektiv, $|S_n/A_n| = 2$, Lagrange.