1.13 Symmetrische Gruppe

1.13.1 Definition: Die Gruppe S_n aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ heisst die *symmetrische Gruppe vom Grad n*. Ihre Elemente bezeichnet man meist mit kleinen griechischen Buchstaben und schreibt ihre Operation klammernlos in der Form $\sigma\colon i \mapsto \sigma i$.

1.13.2 Proposition: Es gilt $|S_n| = n!$.

1.13.3 Satz: *(Cayley)* Jede endliche Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer S_n.

1.13.4 Definition: Ein Paar (i, j) mit $1 \leqslant i < j \leqslant n$ und $\sigma i > \sigma j$ heisst ein *Fehlstand von σ*. Die Zahl

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \;:=\; (-1)^{\text{Anzahl Fehlstände von } \sigma}$$

heisst das *Signum* oder die *Signatur* oder das *Vorzeichen von σ*. Eine Permutation mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ heisst *gerade*, eine mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ heisst *ungerade*.

1.13.5 Proposition: Die Abbildung $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

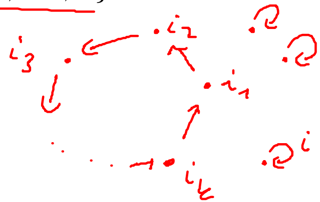
1.13.6 Definition: Der Kern von $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ heisst die *alternierende Gruppe A_n*.

$V \times \ldots \times V \longrightarrow W$

multilinear

1.13.7 Proposition: Für alle $n \geqslant 2$ gilt $[S_n : A_n] = 2$ und $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

1.13.8 Definition: Für $k \geqslant 1$ und paarweise verschiedene Ziffern $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet $(i_1\ \ldots\ i_k)$ die Permutation in S_n mit



$$i_1 \mapsto i_2 \mapsto \ldots \mapsto i_k \mapsto i_1 \quad \text{und} \quad i \mapsto i \quad \text{für alle } i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}.$$

Eine solche Permutation heisst ein *k-Zykel.* Ein 2-Zykel heisst eine *Transposition.*

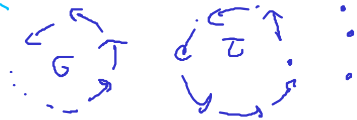
1.13.9 Proposition: (a) Zwei Zykel $(i_1\ \ldots\ i_k)$ und $(j_1\ \ldots\ j_\ell)$ sind gleich genau dann, wenn entweder $k = \ell = 1$ ist, oder $k = \ell > 1$ ist und ein $1 \leqslant m \leqslant k$ existiert mit $(j_1\ \ldots\ j_\ell) = (i_{m+1}\ \ldots\ i_k\ i_1\ \ldots\ i_m)$.

(b) Für je zwei disjunkte Zykel σ und τ gilt $\sigma\tau = \tau\sigma$.

$(2) = (4)$

(c) Für jeden Zykel gilt $(i_1\ \ldots\ i_k)^{-1} = (i_k\ \ldots\ i_1)$.

(d) Für jeden Zykel und jedes $\sigma \in S_n$ gilt ${}^{\sigma}(i_1\ \ldots\ i_k) = (\sigma i_1\ \ldots\ \sigma i_k)$.



Bew.: $\tau = (i_1\ \ldots\ i_k)$

$\forall j: \ {}^{\sigma}\tau(\sigma i_j) = \sigma\tau\sigma^{-1}\sigma i_j = \sigma\tau i_j = \sigma\left(\begin{cases} i_{j+1} & \text{falls } j<k \\ i_1 & \text{"}\ j=k \end{cases}\right) = \begin{cases} \sigma i_{j+1} & \text{falls } j<k \\ \sigma i_1 & \text{falls } j=k \end{cases}$

$\forall i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}: \ {}^{\sigma}\tau(\sigma i) = \sigma\tau\sigma^{-1}\sigma i = \sigma\tau i = \sigma i$

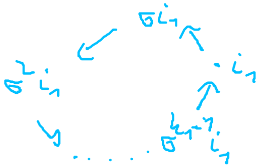
$\Rightarrow {}^{\sigma}\tau = (\sigma i_1\ \ \sigma i_2\ \ \ldots\ \ \sigma i_k)$ qed.

1.13.10 Folge: Je zwei k-Zykel in S_n sind konjugiert.

Beweis: $\tau = (i_1\ \ldots\ i_k)$, $\rho = (j_1\ \ldots\ j_k)$. Wähle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma i_\nu = j_\nu$ für alle $1 \leq \nu \leq k$.
$\Rightarrow {}^{\sigma}\tau = \rho$. qed.

1.13.11 Proposition: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt disjunkter Zykel. Dabei kann man alle 1-Zykel weglassen, und danach sind die Faktoren bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Sie entsprechen den Bahnen der Länge > 1 von $\langle\sigma\rangle$ auf $\{1, \dots, n\}$.

Bew.: Seien $i_1, \dots, i_r$ Repräsentanten aller Bahnen von $\langle\sigma\rangle$ auf $\{1, \dots, n\}$.



$$\rightsquigarrow \sigma = \prod_{\nu=1}^{r} \underbrace{(i_\nu \ \ \sigma i_\nu \ \ \dots \ \ \sigma^{k_\nu - 1} i_\nu)}$$

qed.

$k_\nu = |\text{Bahn von } i_\nu|$

für alle $1 \le \nu \le r$

$$\underbrace{(1\ 2)}_{3.}\underbrace{(3\ 4)}_{2.}\underbrace{(2\ 3\ 4)}_{1.} = (1\ 2\ 4)\cancel{(3)}$$

$$\underbrace{(1\ 2\ 5)}\underbrace{(7\ 2\ 3)}\underbrace{(4\ 5\ 6)} = (1\ 2\ 3\ 7\ 5\ 6\ 4)$$

Rechnen mit Zykeln:

Sei $\sigma \in S_n$:

i	1	2	3	4	5	6	7
σi	7	2	4	1	6	5	3

$\Rightarrow \sigma = (1\ 7\ 3\ 4)(5\ 6)$

1.13.12 Definition: Eine Folge $(d_1, d_2, \ldots)$ in $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ mit $\sum'_{k\geqslant 1} d_k k = n$ heisst eine *(ungeordnete) Partition von n*. Die Anzahl $p(n)$ solcher Partitionen heisst *Partitionsfunktion von n*.

$p: \mathbb{Z}^{\geq 0} \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

1.13.13 Proposition: Für jedes $\sigma \in S_n$ sei d_k die Anzahl der Bahnen der Länge k von $\langle\sigma\rangle$. Dann induziert die Abbildung $\sigma \mapsto (d_1, d_2, \ldots)$ eine Bijektion von der Menge der Konjugationsklassen von S_n auf die Menge der Partitionen von n. Die Anzahl der Konjugationsklassen von S_n ist also $p(n)$.

Bew.: $n = |\{1,\ldots,n\}| = (\text{Summe der Längen aller Bahnen von } \langle\sigma\rangle) = \sum d_k k$.

$\Rightarrow (d_1, d_2, \ldots)$ ist eine Partition von n.

Sei $\tau \in S_n$ mit denselben $(d_1, d_2, \ldots)$.

Schreibe $\sigma = \prod_{\nu=1}^{r} (i_\nu \;\; \sigma i_\nu \;\; \ldots \;\; \sigma^{k_\nu - 1} i_\nu)$

$\tau = \prod_{\nu=1}^{r} (j_\nu \;\; \tau j_\nu \;\; \ldots \;\; \tau^{k_\nu - 1} j_\nu)$

Definiere $\rho \in S_n$ durch $\rho(\sigma^l i_\nu) = \tau^l j_\nu$.

$\Rightarrow {}^\rho\sigma = \prod_{\nu=1}^{r} (\rho i_\nu \;\; \rho\sigma i_\nu \;\; \ldots \;\; \rho\sigma^{k_\nu - 1} i_\nu) = \tau$.

$\Rightarrow \sigma$ zu τ konjugiert.

Umgekehrt: Sei $\tau = {}^\rho\sigma$ für ein $\rho \in S_n$

$\Rightarrow \tau = \prod_{\nu=1}^{r} (\rho i_\nu \;\; \ldots \;\; \rho\sigma^{k_\nu - 1} i_\nu)$ disjunkte Zykel.

$\Rightarrow \tau$ entspricht derselben Partition von n.

Sei $(d_1, \ldots)$ irgendeine Partition von n. Zerlege $\{1, \ldots, n\}$ in $r := \sum_{k \geq 1} d_k$ disjunkte Teilmengen, so dass genau d_k die Ordnung k haben. Bringe jede davon in eine Reihenfolge $i_{\nu 1}, \ldots, i_{\nu k_\nu}$

$\Rightarrow \sigma := \prod_{\nu=1}^{r} (i_{\nu 1} \;\; \ldots \;\; i_{\nu k_\nu})$ liefert die Partition $(d_1, \ldots)$

Ziel

1.13.14 Proposition: Jede Permutation ist ein Produkt von Nachbartranspositionen, das heisst von Transpositionen der Form $(i \;\; i{+}1)$ für gewisse $1 \leqslant i < n$.

Bem.: $(i \;\; i+1)$ hat genau einen Fehlstand $(i, i+1)$.

Bew.: Genügt für $\sigma = (i_1 \; i_2 \ldots i_k) \doteq (i_1 \; i_2)(i_2 \; i_3) \cdots (i_{k-1} \; i_k)$

$\Rightarrow$ Genügt für $\sigma = (i \;\; j)$ mit $i < j$.

$(i \;\; j) = (j-1 \;\; j) \cdots \underbrace{(i+1 \;\; i+2)(i \;\; i+1)(i+1 \;\; i+2)}_{(i \;\; i+2)} \cdots (j-1 \;\; j)$ qed.

1.13.15 Folge: Die S_n ist von allen Transpositionen erzeugt. und genauso von allen Nachbartranspositionen.

1.13.16 Proposition: Für jeden k-Zykel σ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

Beweis: $\sigma = (i_1 \ldots i_k)$ Wähle $\tau \in S_n$ mit $\tau j = i_j$ für $1 \leq j \leq k$.

Setze $\gamma := (1 \ldots k) \Rightarrow \sigma = {}^{\tau}\gamma \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau \gamma \tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\gamma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)^{-1}$

$= \operatorname{sgn}(\gamma)$.

$\gamma = \underbrace{(1 \;\; 2)(2 \;\; 3) \cdots (k-1 \;\; k)}_{k-1 \text{ Faktoren}}$; $\forall i: \operatorname{sgn}((i \;\; i+1)) = -1$.

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\gamma) = (-1)^{k-1}$. qed.

1.13.17 Proposition: Die A_n ist von allen 3-Zykeln erzeugt.

Bew.: $\forall \sigma \in A_n$: Sei $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$, τ_i Nachbartranspositionen.

$\Rightarrow 1 = \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r \Rightarrow r$ gerade.

$\Rightarrow \sigma = \underbrace{(\tau_1 \tau_2)} \cdots \underbrace{(\tau_{r-1} \tau_r)}$

jedes in A_n.

$\Rightarrow$ Genügt $\sigma = \tau\tau'$ für Nachbartranspositionen τ, τ'.

$\sigma = (i \;\; i+1)(i \;\; i+1) \Rightarrow \sigma = 1$.

$\sigma = (i \;\; i+1)(i+1 \;\; i+2) = (i \;\; i+1 \;\; i+2)$

$\sigma = (i \;\; i+1)(i-1 \;\; i) = (i \;\; i-1 \;\; i+1)$ 3-Zykel.

$\sigma = (i \;\; i+1)(j \;\; j+1)$ für $j \neq i, i-1, i+1$

$\tau := (i \;\; i+1 \;\; j) \Rightarrow \tau\sigma = (i \;\; j \;\; j+1) \Rightarrow \sigma = \tau^{-1} \cdot (\tau\sigma)$ qed.

1.13.18 Spezialfall: Die Untergruppen von S_n für $n = 2, 3, 4$ sind bis auf Konjugation:

Untergruppe von S_2	isomorph zu	Ordnung	Anzahl Konjugierte
1	C_1	1	1 $\rightsquigarrow$ normal
S_2	C_2	2	1 $\rightsquigarrow$ normal

$|S_3| = 3! = 6$

Untergruppe von S_3	isomorph zu	Ordnung	Anzahl Konjugierte
1	C_1	1	1 $\rightsquigarrow$ normal
$\langle(1\ 2)\rangle$	C_2	2	3
A_3	C_3	3	1 $\rightsquigarrow$ normal
S_3	D_3	6	1 $\rightsquigarrow$ normal

$\langle(1\ 2\ 3)\rangle = A_3$

$$\left.\begin{array}{l} S := (1\ 2) \\ T := (1\ 2\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S^2 = 1 = T^3 \\ STS^{-1} = (2\ 1\ 3) = (3\ 2\ 1) = T^{-1} \end{array}\right| \Rightarrow S_3 \cong D_3.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & S_3 \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_3 \arrow[drr, dash] & \langle(1 2)\rangle \arrow[dr, dash] & \langle(1 3)\rangle \arrow[d, dash] & \langle(2 3)\rangle \arrow[dl, dash] \\
 & & 1 &
\end{tikzcd}$$

Untergruppe von S_4	isomorph zu	Ordnung	Anzahl Konjugierte
1	C_1	1	$1 \rightsquigarrow$ normal
$\langle (1\ 2) \rangle$	C_2	2	6
$\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$	C_2	2	3
$\langle (1\ 2\ 3) \rangle$	C_3	3	4
$\langle (1\ 2), (3\ 4) \rangle$	$C_2 \times C_2$	4	3
$\langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$	$C_2 \times C_2$	4	$1 \rightsquigarrow$ normal
$\langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$	C_4	4	3
$\langle (1\ 2\ 3), (1\ 2) \rangle$	S_3	6	4
$\langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$	D_4	8	3
A_4	A_4	12	$1 \rightsquigarrow$ normal
S_4	S_4	24	$1 \rightsquigarrow$ normal

kommutativ!

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$
$\tau = (1\ 3)$
$\sigma^4 = \tau^2 = 1$
$\tau_\sigma = \sigma^{-1}$

1.13.19 Bemerkung: Die Untergruppe

$$K \ := \ \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \ = \ \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

von S_4 heisst die *Kleinsche Vierergruppe*. Sie ist normal und hat die Faktorgruppe $S_4/K \cong S_3$. Die drei Untergruppen der Ordnung 2 von K sind normal in K, aber nicht normal in S_4.

S_4 operiert auf $K \setminus \{1\}$; Kardinalität 3.

$\rightsquigarrow$ Homo $S_4 \to S_3$

Ker $= K$. $\Rightarrow S_4/K \cong$ Bild $\leq S_3 \Rightarrow$ surjektiv!

$|S_4/K| = \frac{24}{4} = 6 = |S_3|$