1.14 Freie Gruppen

Betrachte eine Menge I.

1.14.1 Definition: Eine *freie abelsche Gruppe mit Erzeugenden x_i für alle $i \in I$*, oder kurz eine *freie abelsche Gruppe über I* ist eine abelsche Gruppe F_I^{ab} zusammen mit einer Abbildung $\kappa\colon I \to F_I^{\mathrm{ab}}$, $i \mapsto x_i$, so dass die folgende *universelle Eigenschaft* gilt:

Für jede abelsche Gruppe H und jede Abbildung $f\colon I \to H$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon F_I^{\mathrm{ab}} \to H$ mit $\varphi \circ \kappa = f$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, mapsto] & I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\kappa"'] & H \\ x_i & & F_I^{\mathrm{ab}} \arrow[u, dotted, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

1.14.2 Proposition: Eine freie abelsche Gruppe über I ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, mit anderen Worten: Sind $(F_I^{\mathrm{ab}}, \kappa)$ und $(F_I'^{\mathrm{ab}}, \kappa')$ zwei solche, so existiert ein eindeutiger Gruppenisomorphismus $\iota\colon F_I^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} F_I'^{\mathrm{ab}}$ mit $\iota \circ \kappa = \kappa'$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] & F_I'^{\mathrm{ab}} \\ & F_I^{\mathrm{ab}} \arrow[u, dotted, "\iota"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

Beweisskizze:

$$\begin{tikzcd} & F_I^{\mathrm{ab}} \\ I \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] & F_I'^{\mathrm{ab}} \arrow[u, "\iota'"'] \\ & F_I^{\mathrm{ab}} \arrow[u, "\iota"'] \arrow[uu, bend right, "\iota'\circ\iota"] \end{tikzcd} \quad \mathrm{id}_{F_I^{\mathrm{ab}}}$$

Existenz in UE $\rightsquigarrow \iota, \iota'$

Eindeutigkeit $\rightsquigarrow \iota' \circ \iota = \mathrm{id}$

$\iota \circ \iota' = \mathrm{id}.$

$\Rightarrow \iota$ Isom.

qed.

1.14.3 Proposition: Eine abelsche Gruppe F_I^{ab} mit einer Abbildung $\kappa\colon I \to F_I^{\mathrm{ab}}$, $i \mapsto x_i$ ist genau dann eine freie abelsche Gruppe über I, wenn sich jedes Element von F_I^{ab} schreiben lässt in der Form $\prod'_{i\in I} x_i^{n_i}$ für eindeutige $n_i \in \mathbb{Z}$, von denen fast alle gleich 0 sind.

$\boxed{\text{additiv} \quad \sum'_{i\in I} n_i \cdot x_i}$

$\boxed{|I| = n \rightsquigarrow \mathbb{Z}^{(I)} = \mathbb{Z}^n}$

1.14.4 Beispiel: Der freie $\mathbb{Z}$-Modul

$$\mathbb{Z}^{(I)} := \{(a_i)_i \in \mathbb{Z}^I \mid \text{fast alle } a_i = 0\}$$

zusammen mit der Abbildung auf die Standardbasis $i \mapsto e_i := (\delta_{ij})_j$ ist eine freie abelsche Gruppe über I.

$\hookrightarrow \quad (a_i)_i = \sum'_{i\in I} a_i \cdot e_i$.

Beweis: Genügt: $\mathbb{Z}^{(I)}$ mit $i \mapsto e_i$ ist freie abelsche Gruppe über I.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i \mapsto e_i"'] & & H \\ & \mathbb{Z}^{(I)} \arrow[ur, dashed, "\varphi \text{ Homo}"'] & \end{tikzcd}$$

H additiv geschrieben.

Für jedes solche φ ist $\varphi(e_i) = f(i)$.

$\Rightarrow \varphi((a_i)_i) \overset{(*)}{=} \sum'_{i\in I} a_i \cdot f(i)$. $\Rightarrow \varphi$ eindeutig.

Umgekehrt: Die Formel $(*)$ definiert einen Homo mit $\varphi \circ \kappa = f$. $\Longrightarrow$ UE gilt. qed.

1.14.5 Definition: Eine *freie Gruppe mit Erzeugenden x_i für alle $i \in I$*, oder kurz eine *freie Gruppe über I* ist eine Gruppe F_I zusammen mit einer Abbildung $\kappa\colon I \to F_I$, $i \mapsto x_i$, so dass die folgende *universelle Eigenschaft* gilt:

Für jede Gruppe H und jede Abbildung $f\colon I \to H$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon F_I \to H$ mit $\varphi \circ \kappa = f$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, mapsto] & & I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & H \\
& x_i & & F_I \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

1.14.6 Konvention: Eine freie Gruppe mit n Erzeugenden wird oft mit F_n bezeichnet.

1.14.7 Proposition: Eine freie Gruppe über I ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, mit anderen Worten: Ist sowohl (F_I, κ) wie (F'_I, κ') eine solche, so existiert ein eindeutiger Gruppenisomorphismus $\iota\colon F_I \xrightarrow{\sim} F'_I$ mit $\iota \circ \kappa = \kappa'$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & F'_I \\
& F_I \arrow[ur, dotted, "\cong", "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

1.14.8 Satz: Für jede Menge I existiert eine freie Gruppe über I.

1.14.9 Konstruktion: Sei $\tilde{I}$ die Menge der Symbole i^ε für alle $i \in I$ und alle $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Eine endliche Folge der Länge $\geqslant 0$ in $\tilde{I}$ heisst ein *Wort über dem Alphabet $\tilde{I}$*. Wir schreiben ein Wort ohne Klammern als $w = i_1^{\varepsilon_1} \dots i_n^{\varepsilon_n}$ und nennen die Zeichen $i_\nu^{\varepsilon_\nu}$ die *Buchstaben von w*. Sei $W_{\tilde{I}}$ die Menge aller Wörter über $\tilde{I}$. Zusammensetzen zweier Wörter w, w' der Längen n, n' liefert ein Wort ww' der Länge $n + n'$. Diese Operation ist assoziativ, und das leere Wort ist ein beidseitiges neutrales Element.

$\dots x_i^{\varepsilon} \cdot x_i^{-\varepsilon} \dots$

Das Herausstreichen oder Einfügen zweier benachbarter Buchstaben der Form $i^\varepsilon i^{-\varepsilon}$ heisst eine *elementare Transformation.* Wir nennen zwei Wörter $w, w' \in W_{\tilde{I}}$ *äquivalent* und schreiben $w \sim w'$, wenn sie durch eine Folge elementarer Transformationen ineinander übergehen. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $W_{\tilde{I}}$. Sei $[w]$ die Äquivalenzklasse von $w \in W_{\tilde{I}}$ und $F_I := W_{\tilde{I}}/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen.

1.14.10 Proposition: Es existiert eine eindeutige Gruppenstruktur auf F_I, so dass für alle $w, w' \in W_{\tilde{I}}$ gilt $[w][w'] = [ww']$. Deren Einselement ist die Äquivalenzklasse des leeren Worts. Die Gruppe F_I zusammen mit der Abbildung $I \to F_I$, $i \mapsto [i^1]$ ist eine freie Gruppe über I.

Bew.:
$$\begin{tikzcd} W_{\tilde I} \times W_{\tilde I} \arrow[r] \arrow[d] & W_{\tilde I} \arrow[d] \\ F_I \times F_I \arrow[r, dashed] & F_I \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} w \\ \downarrow \\ [w] \end{matrix}$$

Seien $w, w' \in W$ mit $[v] = [w]$ und $[v'] = [w']$.
$v, v' \in W$

Bel.: $[vv'] = [ww']$.

Bew.: Seien $v = v_0 \to v_1 \to \dots \to v_r = w$ elementare Trafo's
$v' = v'_0 \to v'_1 \to \dots \to v'_s = v'$

$\Rightarrow vv' = v_0 v' \to v_1 v' \to \dots \to v_r v' = wv'_0 \to wv'_1 \to \dots \to wv'_s$ sind auch elementare Trafo's. $\Rightarrow vv' \sim ww'$ qed.

Assoziativ: $[w]([w'][w'']) = [w][w'w''] = [ww'w'']$
$([w][w'])[w''] = [ww'][w'']$

Neutrales El.:
$[\,][w] = [().w] = [w]$.

Zu einem Element: $w = i_1^{\varepsilon_1} \cdots i_r^{\varepsilon_r}$

$$\Rightarrow \quad [i_r^{-\varepsilon_r} \cdots i_1^{-\varepsilon_1}] \cdot [w] = [i_r^{-\varepsilon_r} \cdots i_1^{-\varepsilon_1} i_1^{\varepsilon_1} \cdots i_r^{\varepsilon_r}] = [\,].$$

$\Rightarrow$ F_I Gruppe.

UE:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k"'] & H \\
& F_I \arrow[u, dotted, "\varphi ?"']
\end{tikzcd}
\qquad i \mapsto x_i$$

$$H \ni f(i_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(i_r)^{\varepsilon_r} \overset{(*)}{\longleftarrow\!\shortmid} F_I \ni [i_1^{\varepsilon_1} \cdots i_r^{\varepsilon_r}] = [i_1^{\varepsilon_1}] \cdots [i_r^{\varepsilon_r}] = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_r}^{\varepsilon_r}$$

Rechne nach: (*) definiert ein Hom.

qed.

1.14.11 Definition: Ein Wort $w \in W_{\tilde{I}}$, welches kein zusammenhängendes Teilwort der Form $i^\varepsilon i^{-\varepsilon}$ enthält, heisst *reduziert*.

1.14.12 Proposition: Jedes Wort $w \in W_{\tilde{I}}$ ist äquivalent zu genau einem reduzierten Wort.

1.14.13 Bemerkung: Zu jedem gegebenen Wort findet man ein äquivalentes reduziertes Wort durch wiederholtes Herausstreichen benachbarter Buchstaben der Form $i^\varepsilon i^{-\varepsilon}$, bis dies nicht mehr möglich ist. Das resultierende reduzierte Wort ist dann der eindeutige reduzierte Repräsentant der Äquivalenzklasse. Mit diesem Algorithmus kann man entscheiden, ob zwei beliebige gegebene Wörter dasselbe Element von F_I darstellen.

Bem.: Genügt zu zeigen: w, w' reduziert, äquivalent $\Rightarrow w = w'$.

Seien $w = v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_r = w'$ elementare Trafo's mit r minimal.

Mit diesem r wähle $\sum_{i=0}^{r} \ell(v_i)$ minimal.

Annahme $w \neq w'$.

$\Rightarrow r > 0$ und $\ell(v_1) > \ell(v_0)$ und $\ell(v_{r-1}) > \ell(v_r)$.

$\Rightarrow \exists\, 0 < i < r : \ell(v_{i-1}) = \ell(v_i) - 2 = \ell(v_{i+1})$

$v_{i-1} \leftarrow v_i \longrightarrow v_{i+1}$

beides Streichen

Fall (a): Streichen beides dasselbe Teilwort

$\Rightarrow v_{i-1} = v_{i+1} \Rightarrow$ Widerspruch zur Minimalität von r.

Fall (b): Ein Buchstabe gemeinsam.

$$\Rightarrow \quad v_i = v\, i^{\varepsilon}\, i^{-\varepsilon}\, i^{\varepsilon}\, v'$$

$$v_{i\pm 1} = v\, i^{\varepsilon} v' \qquad v_{i\mp 1} = v\, i^{\varepsilon} v'$$

$$\Rightarrow v_{i-1} = v_{i+1} \quad \Rightarrow \lightning.$$

<u>Fall (c)</u>: Streiche disjunkte Teilwörter.

$$\Rightarrow v_i = v\, i^{\varepsilon}\, i^{-\varepsilon}\, v'\, j^{\delta}\, j^{-\delta}\, v''$$

$$v_{i\pm 1} = v v'\, j^{\delta}\, j^{-\delta}\, v'' \qquad v_{i\mp 1} = v\, i^{\varepsilon}\, i^{-\varepsilon}\, v' v''$$

$$v v' v''$$

$$\Rightarrow w = v_0 \to \dots \to v_{i-1} \to v v' v'' \to v_{i+1} \to \dots \to v_r = w'.$$

elementare Trafo'n. mit $\ell(v v' v'') < \ell(v_i)$.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Minimalität von $\sum \ell(v_i)$.

<u>qed.</u>

1.15 Erzeugende und Relationen

Sei $F_I := W_{\tilde{I}}/\sim$ wie im vorigen Abschnitt, und sei J eine Teilmenge von $W_{\tilde{I}}$.

1.15.1 Definition: Sei $N_J \lhd F_I$ der von den Elementen $g[w]g^{-1}$ für alle $w \in J$ und $g \in F_I$ erzeugte Normalteiler. Dann heisst F_I/N_J die *Gruppe mit Erzeugenden I und Relationen J*. Im Fall $I = \{1, \ldots, n\}$ und $J = \{w_1, \ldots, w_m\}$ schreiben wir auch suggestiver

$$\big\langle x_1, \ldots, x_n \;\big|\; w_1 = \ldots = w_m = 1 \big\rangle \;:=\; F_I/N_J.$$

Oder man listet die Relationen separat auf. Eine Relation der Form $v = w$ ist äquivalent zu $vw^{-1} = 1$.

1.15.2 Beispiele:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \;&\cong\; F_1 \;\cong\; \langle x \rangle \\
C_n \;&\cong\; \big\langle x \;\big|\; x^n = 1 \big\rangle \quad \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
\mathbb{Z}^2 \;&\cong\; \big\langle x, y \;\big|\; xy = yx \big\rangle \;=\; \big\langle x, y \;\big|\; xyx^{-1}y^{-1} = 1 \big\rangle \\
D_n \;&\cong\; \big\langle a, b \;\big|\; a^n = b^2 = 1,\; bab^{-1} = a^{-1} \big\rangle \quad \Longleftrightarrow \; bab^{-1}a = 1 \\
D_n \;&\cong\; \big\langle b, c \;\big|\; b^2 = c^2 = (bc)^n = 1 \big\rangle \\
D_\infty \;&:=\; \big\langle b, c \;\big|\; b^2 = c^2 = 1 \big\rangle \qquad \text{(unendliche Diedergruppe)} \\
\{1\} \;&\cong\; \big\langle a, b \;\big|\; a^2b^3 = a^3b^4 = 1 \big\rangle
\end{aligned}$$

$\langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$

ab $\quad \supseteq D_n$

$T \quad S$

$a = bc \Longleftrightarrow c = b^{-1}a$

$c^2 = b^{-1}ab^{-1}a = bab^{-1}a = a^{-1}a = 1$

$b^2 = 1$

1.15.3 Bemerkung: Das Rechnen in beliebigen durch Erzeugende und Relationen beschriebenen Gruppen bringt grosse algorithmische Probleme mit sich. Siehe zum Beispiel `https://en.wikipedia.org/wiki/Word_problem_for_groups`

$$\left.\begin{aligned}
1 &= a^3b^4 = a\cdot(a^2b^3)b = a\cdot 1 b = ab \\
1 &= a^2b^3 = a\cdot(ab)\cdot b^2 = ab^2 = abb = b
\end{aligned}\right\} \Rightarrow b = 1, \quad a = ab = 1$$

Jedes Element in D_∞ ist repräsentiert durch ein Wort in b, c wobei $b^{-1} = b$

$c^{-1} = c$

$\rightsquigarrow \{bc, cb\} \cdots \{bc, cb\}$

$a := bc$ $D_\infty = \{ a^n, a^n b, ca^n, ca^n b \mid n \geq 0 \} = \{ a^n, a^n b \mid n \in \mathbb{Z} \}$

$ca^n b = \underbrace{cb\, cb \cdots cb}_{n+1} = (\underbrace{bc\, bc \cdots bc}_{n+1})^{-1}$

$\langle a \rangle \trianglelefteq D_\infty$

Index 2

$(a^n b)^2 = 1.$