1.3 Nebenklassen

1.3.1 Definition: *(Rechnen mit Teilmengen)* Für beliebige Teilmengen $X, Y \subset G$ und Elemente $g \in G$ schreiben wir

$$\begin{aligned} XY &:= \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}, \\ gX &:= \{gx \mid x \in X\}, \\ Xg &:= \{xg \mid x \in X\}, \\ X^{-1} &:= \{x^{-1} \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität von G ist auch das Produkt von Teilmengen assoziativ, das heisst, es gilt $X(YZ) = (XY)Z$ und $g(XY) = (gX)Y$ und so weiter. Bei Produkten von mehreren Teilmengen und/oder Elementen können wir daher wieder die Klammern weglassen. Weiter gilt

$$(XY)^{-1} = \Big\{ \underbrace{(xy)^{-1}}_{y^{-1}x^{-1}} \;\Big|\; \begin{matrix} x \in X \\ y \in Y \end{matrix} \Big\}$$

$$\begin{aligned} (XY)^{-1} &= Y^{-1}X^{-1} \\ (gX)^{-1} &= X^{-1}g^{-1} \\ (Xg)^{-1} &= g^{-1}X^{-1} \\ XY &= YX && \text{falls } G \text{ abelsch ist,} \\ gX &= Xg && \text{falls } G \text{ abelsch ist.} \end{aligned}$$

$$1 \cdot X = X$$

$$X^{-1} \cdot X \neq \{1\}$$

1.3.2 Definition: Betrachte eine Untergruppe $H < G$. Für jedes Element $g \in G$ heisst

$$\begin{aligned} gH &= \{gh \mid h \in H\} && \text{eine } \textit{Linksnebenklasse von } H, \\ Hg &= \{hg \mid h \in H\} && \text{eine } \textit{Rechtsnebenklasse von } H. \end{aligned}$$

Die Menge der jeweiligen Nebenklassen wird bezeichnet mit

$$\begin{aligned} G/H &= \{gH \mid g \in G\}, \\ H\backslash G &= \{Hg \mid g \in G\}. \end{aligned}$$

1.3.3 Proposition: Für jedes $g \in G$ ist $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$ und $(Hg)^{-1} = g^{-1}H$. Dies liefert eine natürliche Bijektion zwischen Links- und Rechtsnebenklassen

$(gH)^{-1} = \{(gh)^{-1} \mid h \in H\}$
$= \{h^{-1}g^{-1} \mid h \in H\} = H^{-1}g^{-1} = Hg^{-1}$

$$G/H \to H\backslash G,\ gH \mapsto Hg^{-1}.$$

Alle folgenden Aussagen für Linksnebenklassen kann man damit in Aussagen für Rechtsnebenklassen übersetzen.

1.3.4 Proposition: Für alle $g, g' \in G$ gilt

$$gH = g'H \iff g \in g'H \iff g' \in gH \iff gH \cap g'H \neq \varnothing.$$

Insbesondere ist G die disjunkte Vereinigung aller Linksnebenklassen von H.

1.3.5 Proposition: Für alle $g \in G$ gilt $|gH| = |H|$. da $H \to gH$, $h \mapsto gh$ ist bijektiv.

1.3.6 Bemerkung: Die Menge G/H hat im allgemeinen keine natürliche Gruppenstruktur; vergleiche §1.9.

1.4 Ordnung, Index, Exponent

1.4.1 Definition: (a) Die *Ordnung von G* ist die Kardinalität $|G|$.

(b) Die *Ordnung* eines Elements $g \in G$ ist die Kardinalität $\operatorname{ord}(g) := |\langle g \rangle|$.

(c) Der *Index* einer Untergruppe $H < G$ ist die Kardinalität $[G : H] := |G/H|$.

1.4.2 Beispiel: Es gilt $[G : G] = 1$ und $[G : 1] = |G|$.

$G/\{1\} = \{\{g\} \mid g \in G\}$.

1.4.3 Proposition: Die Ordnung eines Elements $g \in G$ ist die kleinste ganze Zahl $n \geqslant 1$ mit $g^n = 1$, falls diese existiert, und andernfalls ∞.

1.4.4 Satz: *(Lagrange)* Für jede Untergruppe $H < G$ gilt

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

$= [G:K] \cdot |K|$.

$= [G:H] \cdot [H:K] \cdot |K|$.

1.4.5 Folge: In jeder endlichen Gruppe G sind $|H|$ und $[G : H]$ und $\operatorname{ord}(g)$ Teiler von $|G|$.

1.4.6 Folge: Jede endliche Gruppe G von Primzahlordnung ist zyklisch und besitzt nur die Untergruppen 1 und G.

$\forall g \in G \setminus \{1\} : |\langle g \rangle| > 1$ und teilt $|G|$.

$\Rightarrow \langle g \rangle = G$.

1.4.7 Satz: Für alle Untergruppen $K < H < G$ gilt

$$[G:K] = [G:H]\cdot[H:K].$$

$S\times T \to ST$ bijektiv.

Bew.: Sei $S\subset G$ ein Repräsentantensystem von G/H, d.h. $G = \coprod_{g\in S} gH$.
Sei $T\subset H$ - - - - - - - - - - - - - H/K, d.h. $H = \coprod_{h\in T} hK$

$\Rightarrow G = \coprod_{g\in S} g\left(\coprod_{h\in T} hK\right) = \coprod_{g\in S}\coprod_{h\in T} ghK$ $\Rightarrow$ Die gh für alle $g\in S, h\in T$ sind paarweise verschieden und bilden ein Rep.-sys. für G/K.
$\Rightarrow |G/K| = |S\times T| = |S|\cdot|T| = |G/H|\cdot|H/K|$. qed

1.4.8 Definition: Der *Exponent* $\exp(G)$ *von* G ist die kleinste ganze Zahl $n \geqslant 1$ mit der Eigenschaft $\forall g\in G\colon\ g^n = 1$, falls diese existiert, und andernfalls ∞.

Der Exponent ist also das kleinste gemeinsame Vielfache von $\operatorname{ord}(g)$ für alle $g\in G$.

1.4.9 Folge: Der Exponent jeder endlichen Gruppe teilt die Gruppenordnung.

1.4.10 Bemerkung: Der Exponent kann endlich sein, auch wenn die Gruppe selbst unendlich ist, zum Beispiel für die additive Gruppe eines unendlich-dimensionalen Vektorraums über $\mathbb{F}_2$.

1.4.11 Proposition: Jede Gruppe vom Exponenten ~~4~~ ≤ 2 ist abelsch.

$\forall g\in G:\ g^2 = 1 \Rightarrow g^{-1} = g$

Bsp.: $\mathbb{Z}$ hat Exponent ∞.