1.8 Normalteiler

1.8.1 Proposition: Für jede Untergruppe $N < G$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\forall g \in G\colon\ {}^gN = N$

(b) $\forall g \in G\colon\ {}^gN \subset N$ $\Rightarrow \forall g \in G: {}^{g^{-1}}N \subset N \Rightarrow N = {}^g({}^{g^{-1}}N) \subset {}^gN \Rightarrow (a)$

(c) $\forall g \in G\colon\ gN = Ng$ $\Longleftrightarrow {}^gN = gNg^{-1} = N \Longleftrightarrow (a).$

(d) Jede Linksnebenklasse von N ist gleichzeitig eine Rechtsnebenklasse von N. $\Rightarrow \forall g \in G\,;\ \exists h \in G:\ gN = Nh \ni g \Rightarrow Nh = Ng \Rightarrow (c).$

(e) Jede Rechtsnebenklasse von N ist gleichzeitig eine Linksnebenklasse von N.

(e) analog.

1.8.2 Definition: Eine Untergruppe N mit den obigen Eigenschaften heisst *normal* oder ein *Normalteiler von G*. Die Aussage „N ist ein Normalteiler von G“ bezeichnet man kurz mit $N \lhd G$ oder $G \rhd N$.

$N \lhd G$

1.8.3 Beispiel: In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe normal.

$\forall g, h \in G,\ {}^gh = h \Rightarrow \forall H < G: \forall g \in G: {}^gH = H \Rightarrow H \lhd G.$

1.8.4 Proposition: Jede Untergruppe vom Index 2 ist normal.

Bew.: $H < G$ Index 2 $\Rightarrow$ Wähle $g \in G \setminus H$. $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} G = H \sqcup gH. \\ G = H \sqcup Hg \end{array}\right\} \Rightarrow gH = Hg.$ $\left.\begin{array}{l} \\ \forall h \in H:\ hH = H = Hh. \end{array}\right\} \Rightarrow H \lhd G.$

qed.

Bsp.: $\{1\}, G \lhd G.$

1.8.5 Vorsicht: Aus $K \lhd H$ und $H \lhd G$ folgt im allgemeinen nicht $K \lhd G$. Vergleiche auch §5.2.

1.8.6 Beispiel: Seien T eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und S eine Spiegelung in der Diedergruppe D_n. Dann ist $\langle T\rangle = C_n$ vom Index 2 in D_n und folglich normal. Dagegen ist $\langle S\rangle \cong C_2$ nur normal in D_n für $n \leqslant 2$. Für $n = 4$ ist allerdings $\langle S\rangle \lhd \langle S, T^2\rangle \lhd D_n$, weil der Index jeweils gleich 2 ist.

$|\langle T\rangle| = n$ | $C_n \lhd D_n$. | $STS^{-1} = T^{-1}$. $\Rightarrow$ $TS = S^2 T \cdot S^{-1} = ST^{-1}$

$|D_n| = 2n$ | | ${}^T S = TST^{-1} = ST^{-1}T^{-1} = ST^{-2}$.

$$\begin{array}{cc} D_4 & 8 \\ |\,2 & \\ \langle S, T^2\rangle & 4 \\ |\,2 & \\ \langle S\rangle & 2 \\ |\,2 & \\ \{1\} & 1 \end{array}$$

1.8.7 Proposition: Der Kern jedes Homomorphismus $G \to H$ ist ein Normalteiler von G.

Bew.: $\varphi: G \to H$ Homo,

$g \in G$; $k \in \mathrm{Ker}(\varphi)$: $\varphi({}^g k) = \varphi(gkg^{-1}) = \varphi(g)\underbrace{\varphi(k)}_{\substack{\shortparallel \\ 1_H}}\varphi(g)^{-1}$

$$= \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1_H$$

$\Rightarrow$ ${}^g k \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

qed.

1.9 Faktorgruppen

Betrachte einen Normalteiler $N \lhd G$.

1.9.1 Proposition: Die Abbildung

$$G/N \times G/N \longrightarrow G/N, \quad (gN, g'N) \mapsto gNg'N = gg'N$$

ist wohldefiniert und induziert eine Gruppenstruktur auf G/N mit der Nebenklasse $1N = N$ als neutrales Element, und die Abbildung

$$\pi\colon G \to G/N, \quad g \mapsto gN$$

ist ein surjektiver Homomorphismus mit Kern N.

1.9.2 Definition: Die Gruppe G/N heisst die *Faktorgruppe* oder der *Quotient von G nach N*.

1.9.3 Proposition: *(Universelle Eigenschaft)* Für jede Gruppe H und jeden Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$ mit $N \subset \mathrm{Kern}(\varphi)$ existiert genau ein Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon G/N \to H$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/N \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Bew.: Sei $\bar\varphi: G/N \to H$ Homo und $\hat\varphi \circ \pi = \varphi$.

$\Rightarrow \forall g: \bar\varphi(gN) = \bar\varphi(\pi(g)) = \varphi(g) \Rightarrow \bar\varphi$ eindeutig.

Umgekehrt: $\forall g, g' \in G: gN = g'N \Rightarrow \exists n \in N: gn = g'$

$\Rightarrow \varphi(g') = \varphi(gn) = \varphi(g)\underbrace{\varphi(n)}_{=1} = \varphi(g)$

$\Rightarrow$ Die Abb. $\bar\varphi: G/N \to H,\ gN \mapsto \varphi(g)$ ist wohldef.

$\forall g, g' \in G: \bar\varphi(gN \cdot g'N) = \bar\varphi(gg'N) = \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = \bar\varphi(gN)\cdot\bar\varphi(g'N)$

$\Rightarrow \bar\varphi$ ist Homo.

qed.

1.9.4 Homomorphiesatz: Jeder Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$ induziert einen Isomorphismus

$$G/\operatorname{Kern}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Bild}(\varphi),\ \ g\operatorname{Kern}(\varphi) \mapsto \varphi(g).$$

Bew.: Wende UE auf $N = \mathrm{Kern}(\varphi)$ an.

$\Rightarrow$ natürlicher Homo $\bar\varphi$:

$$\begin{tikzcd} G/\mathrm{Kern}(\varphi) \arrow[r] \arrow[dr, "\text{surjektiv}"'] & H \\ & \mathrm{Bild}(\varphi) \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$\forall g \cdot \mathrm{Kern}(\varphi) \in \mathrm{Kern}(\bar\varphi): \quad \varphi(g) = \bar\varphi(g \cdot \mathrm{Kern}(\varphi)) = 1$

$\Rightarrow g \in \mathrm{Kern}(\varphi) \Rightarrow g\,\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi) =$ Einselement von $G/\mathrm{Kern}(\varphi)$.

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(\bar\varphi) = \{1\}. \Rightarrow \bar\varphi$ injektiv. $\Rightarrow$ Iso.

qed.

1.9.5 Erster Isomorphiesatz: Für jede Untergruppe $H < G$ ist $H \cap N$ normal in H, und HN ist eine Untergruppe von G, und wir haben einen Isomorphismus

$$H/(H \cap N) \xrightarrow{\sim} HN/N,\ h(H\cap N) \mapsto hN.$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash] & & \\
HN \arrow[dd, dash, "\trianglerighteq"'] \arrow[dr, dash] & & \\
 & H \arrow[dd, dash, "\trianglerighteq"'] & \\
N \arrow[dr, dash] & & \\
 & H\cap N &
\end{tikzcd}$$

Bew.: $\forall h \in H$: ${}^h(H\cap N) = {}^hH \cap {}^hN = H \cap N \Rightarrow H\cap N \trianglelefteq H$.

$1 = 1\cdot 1 \in H\cdot N$

$\left.\begin{array}{l}\forall h,h' \in H \\ \forall n,n' \in N\end{array}\right\}$: $hn \cdot h'n' = \underbrace{h\cdot h'}_{\in H} \cdot \underbrace{(h'^{-1} n h')}_{\in\, {}^{h'^{-1}}N = N} \cdot \underbrace{n'}_{\in N} \in HN$.

$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = \underbrace{h^{-1}}\underbrace{(h\cdot n^{-1}\cdot h^{-1})}\ H\cdot {}^hN = HN$.

$\Rightarrow HN < G$.

Ist zusätzlich $H \trianglelefteq G$, so $N/_{H\cap N} \xrightarrow{\sim} HN/_H$.

Setze $\varphi: H \to HN/N$, $h \mapsto hN$ Homo.

$\ker(\varphi) = \{h \in H \mid \underbrace{hN = N}_{\Leftrightarrow h\in N}\} = H \cap N$.

UE $\Rightarrow$ $H/_{H\cap N} \xrightarrow{\bar\varphi} HN/_N$ Homo. injektiv ...

Bild$(\bar\varphi) = \{hN \mid h \in H\} = HN/N$.

$\Rightarrow$ surjektiv. qed.

1.9.6 Zweiter Isomorphiesatz: (a) Die Untergruppen von G/N sind genau die Gruppen H/N für alle Untergruppen $H < G$ mit $N \subset H$.

(b) Für solches H ist H/N normal in G/N genau dann, wenn H normal in G ist.

(c) In diesem Fall haben wir einen Isomorphismus

$$G/H \xrightarrow{\sim} (G/N)/(H/N),\ gH \mapsto (gN)(H/N).$$

$$\begin{array}{ccc} G & & G/N \\ | & & | \\ H & & H/N \\ | & & | \\ N & & N/N = \{1_{G/N}\} \end{array}$$

Bew.: (a) Sei $N < H < G \Rightarrow H/N = \{hN \mid h \in H\} \subset G/N$

$1_{G/N} = N \in H/N$.

$\forall h, h' \in H: (hN)(h'N) \underset{\text{in } G/N}{=} hh'N \in H/N$

$h^{-1}N = (hN)^{-1}$ in G/N

$\Rightarrow H/N < G/N$.

Umgekehrt: Sei $\bar{H} < G/N$. Setze $H := \{h \in G \mid hN \in \bar{H}\} = \pi^{-1}(\bar{H})$ für den Homo: $\pi: G \to G/N$

$\Rightarrow H < G$ mit $H/N = \bar{H}$.

(b) H/N normal $\Longleftrightarrow \forall g \in G: {}^{gN}(H/N) = H/N$

Sei $h \in H$ beliebig $\Rightarrow {}^{gN}(hN) = (gN)\cdot(hN)(gN)^{-1} = ghg^{-1}N \in {}^{g}H/N$.

$\Longleftrightarrow \forall g \in G: {}^{g}H/N = H/N$

$\Longleftrightarrow \forall g \in G: {}^{g}H = H \Longleftrightarrow H \trianglelefteq G$.

(c) $\underbrace{G \twoheadrightarrow G/N \twoheadrightarrow}_{\varphi} \dfrac{G/N}{H/N}$ zusammengesetzter Homo. surjektiv.

$\forall g \in G: g \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Longleftrightarrow gN \in H/N \Longleftrightarrow g \in H$.

$\Rightarrow \varphi$ faktorisiert durch einen injektiven Homo $\bar{\varphi}: G/H \to \dfrac{G/N}{H/N}$.

Der ist surjektiv $\Rightarrow$ Iso.

qed.

1.9.7 Definition-Proposition: Eine bijektive Abbildung einer Menge X in sich heisst eine *Permutation von* X. Sei $S(X)$ die Menge aller Permutationen von X. Dann ist $(S(X), \circ, \mathrm{id}_X)$ eine Gruppe, genannt die *symmetrische Gruppe der Menge* X.

$$S_n = S_{\{1,\ldots,n\}}$$

projektiver Raum

1.9.8 Beispiel: Sei k ein Körper und $n \geqslant 0$. Sei $\mathbb{P}^n(k)$ die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume des Raums der Spaltenvektoren k^{n+1}. Dann ist

$$\varphi\colon\ \underset{A}{\mathrm{GL}_{n+1}(k)} \to S(\mathbb{P}^n(k)), \quad A \mapsto (U \mapsto AU)$$

ein Homomorphismus mit dem Kern $k^\times I_{n+1}$; wir erhalten somit einen Isomorphismus der *projektiven linearen Gruppe*

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(k) \ :=\ \mathrm{GL}_{n+1}(k)/k^\times I_{n+1} \ \xrightarrow{\ \sim\ }\ \mathrm{Bild}(\varphi)\ <\ S(\mathbb{P}^n(k)).$$

$A \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \forall v \in k^{n+1} \setminus \{0\}:\ Av = \lambda v$ für ein $\lambda \in k^\times$.

Nächste Abschnitte: Homo's: $G \longrightarrow S_X$.

lineare Darstellung von G: Homo's: $G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ }