

1.8 Normalteiler

1.8.1 Proposition: Für jede Untergruppe $N < G$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $\forall g \in G: {}^gN = N$
 - (b) $\forall g \in G: {}^gN \subset N \Rightarrow \forall g \in G: \exists \{g_i\} \subset N \Rightarrow N = \langle \{g_i\} \rangle \subset {}^gN \Rightarrow (a)$
 - (c) $\forall g \in G: gN = Ng \Leftrightarrow {}^gN = gNg^{-1} = N \Leftrightarrow (a)$
 - (d) Jede Linksnebenklasse von N ist gleichzeitig eine Rechtsnebenklasse von N .
 - (e) Jede Rechtsnebenklasse von N ist gleichzeitig eine Linksnebenklasse von N .
- $\forall g \in G: \exists h \in G: gN = Nh$
 $\Rightarrow Nh = Ng$
 $\Rightarrow (c)$

(e) analog.

1.8.2 Definition: Eine Untergruppe N mit den obigen Eigenschaften heisst **normal** oder ein **Normalteiler** von G . Die Aussage „ N ist ein Normalteiler von G “ bezeichnet man kurz mit $N \triangleleft G$ oder $G \triangleright N$.

1.8.3 Beispiel: In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe normal. $N \triangleleft G$

$\forall g, h \in G: \exists h = h \Rightarrow \forall H < G: \forall g \in G: \exists H = H \Rightarrow H \triangleleft G$

1.8.4 Proposition: Jede Untergruppe vom Index 2 ist normal.

Bew.: $H < G$ Index 2 \Rightarrow Wähle $g \in G \setminus H$. $\Rightarrow \left. \begin{matrix} G = H \cup gH \\ G = H \cup Hg \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{gH = Hg} \Rightarrow H \triangleleft G$. ged.

Bsp.: $\{1\}, G \triangleleft G$
 $\forall h \in H: hH = H = Hh$

1.8.5 Vorsicht: Aus $K \triangleleft H$ und $H \triangleleft G$ folgt im allgemeinen nicht $K \triangleleft G$. Vergleiche auch §5.2.

1.8.6 Beispiel: Seien T eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und S eine Spiegelung in der Diedergruppe D_n . Dann ist $\langle T \rangle = C_n$ vom Index 2 in D_n und folglich normal. Dagegen ist $\langle S \rangle \cong C_2$ nur normal in D_n für $n \leq 2$. Für $n = 4$ ist allerdings $\langle S \rangle \triangleleft \langle S, T^2 \rangle \triangleleft D_n$, weil der Index jeweils gleich 2 ist.

$$\begin{array}{l} |\langle T \rangle| = n \\ |D_n| = 2n \end{array} \left| \begin{array}{l} C_n \triangleleft D_n. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} STS^{-1} = T^{-1} \Rightarrow TS = S^2 \cdot T \cdot S^{-1} = ST^{-1} \\ T_S = TST^{-1} = ST^{-1}T^{-1} = ST^{-2} \end{array}$$

D_4	8
2	
$\langle S, T^2 \rangle$	4
2	
$\langle S \rangle$	2
2	
$\{1\}$	1

1.8.7 Proposition: Der Kern jedes Homomorphismus $G \rightarrow H$ ist ein Normalteiler von G .

Bew.: $\varphi: G \rightarrow H$ Homom.,

$$\begin{aligned} g \in G: k \in \text{Kern}(\varphi) : \varphi(gkg^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(k)\varphi(g)^{-1} \\ &= \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1_H \end{aligned}$$

$\Rightarrow gkg^{-1} \in \text{Kern}(\varphi)$. qed.

1.9 Faktorgruppen

Betrachte einen Normalteiler $N \triangleleft G$.

1.9.1 Proposition: Die Abbildung

$$\underline{G/N \times G/N \longrightarrow G/N}, \quad \underline{(gN, g'N) \mapsto gNg'N = gg'N}$$

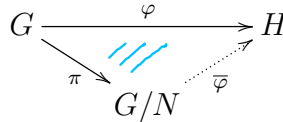
ist wohldefiniert und induziert eine Gruppenstruktur auf G/N mit der Nebenklasse $1N = N$ als neutrales Element, und die Abbildung

$$\underline{\pi: G \rightarrow G/N, \quad g \mapsto gN}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus mit Kern N .

1.9.2 Definition: Die Gruppe G/N heisst die Faktorgruppe oder der Quotient von G nach N .

1.9.3 Proposition: (*Universelle Eigenschaft*) Für jede Gruppe H und jeden Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow H$ mit $N \subset \text{Kern}(\varphi)$ existiert genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow H$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:



Bew.: Sei $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow H$ Homo mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

$\Rightarrow \forall g: \bar{\varphi}(gN) = \bar{\varphi}(\pi(g)) = \varphi(g) \Rightarrow \bar{\varphi}$ eindeutig.

Umgekehrt: $\forall g, g' \in G: gN = g'N \Rightarrow \exists u \in N: g'u = g$

$$\Rightarrow \varphi(g') = \varphi(gu) = \varphi(g)\varphi(u) = \varphi(g)$$

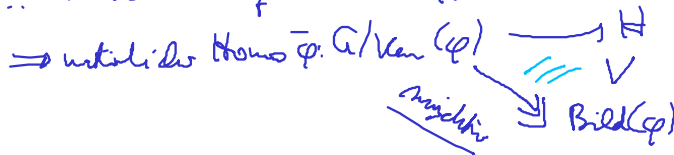
Die Abb. $\bar{\varphi}: G/N \rightarrow H, gN \mapsto \varphi(g)$ ist wohldef.

$$\forall g, g' \in G: \bar{\varphi}(gN \cdot g'N) = \bar{\varphi}(gg'N) = \varphi(gg')$$

1.9.4 Homomorphiesatz: Jeder Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow H$ induziert einen Isomorphismus

$$G / \text{Kern}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \text{Bild}(\varphi), g \text{Kern}(\varphi) \mapsto \varphi(g).$$

Bew.: Wende UE auf $N = \text{Kern}(\varphi)$ an.



$$\forall g \text{Kern}(\varphi) \in \text{Kern}(\bar{\varphi}): \varphi(g) = \bar{\varphi}(g \cdot \text{Kern}(\varphi)) = 1$$

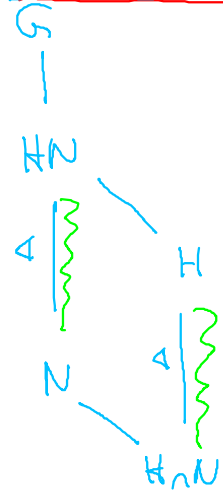
$$\Rightarrow g \in \text{Kern}(\varphi) \Rightarrow g \text{Kern}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi) = \text{Einselement in } G / \text{Kern}(\varphi).$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(\bar{\varphi}) = \{1\} \Rightarrow \bar{\varphi} \text{ injektiv.} \Rightarrow \text{Iso.}$$

$$\begin{aligned}
 & \varphi(g)\varphi(g') \\
 & \bar{\varphi}(gN) \cdot \bar{\varphi}(g'N) \\
 & \Rightarrow \bar{\varphi} \text{ ist Homo.} \\
 & \text{ged.}
 \end{aligned}$$

1.9.5 Erster Isomorphiesatz: Für jede Untergruppe $H < G$ ist $H \cap N$ normal in H , und HN ist eine Untergruppe von G , und wir haben einen Isomorphismus

$$\underline{H/(H \cap N) \xrightarrow{\sim} HN/N, h(H \cap N) \mapsto hN.}$$



Bew., $\forall h \in H: h(H \cap N) = \underbrace{hH}_H \cdot \underbrace{hN}_{N} = H \cap N \Rightarrow H \cap N \triangleleft H.$

$1 = 1 \cdot 1 \in H \cdot N$
 $\forall h, h' \in H: h \cdot h' = \underbrace{h \cdot h'}_H \cdot \underbrace{(h^{-1} h') \cdot 1}_{\in H^{-1} \cdot N = N} \in HN$
 $\forall h, h' \in N: h \cdot h' = \underbrace{h^{-1} h'}_{\in H^{-1}} \cdot \underbrace{h \cdot 1}_{\in N} \in HN$
 $(hN)^{-1} = \underbrace{h^{-1} N^{-1}}_{\in H^{-1} \cdot N = N} = \underbrace{h^{-1} (h \cdot 1 \cdot h^{-1})}_{\in H} \cdot hN = H \cdot hN = hN.$

$\Rightarrow HN < G,$
 Ist transitiv
 $H < G, N$
 $N/H \cap N \xrightarrow{\sim} HN/H.$

Setze $\varphi: H \rightarrow HN/N, h \mapsto hN$ Homo.

$$\text{Kern}(\varphi) = \{h \in H \mid \underbrace{hN}_{\Leftrightarrow h \in N} = N\} = H \cap N.$$

$$\text{UE} \Rightarrow H/H \cap N \xrightarrow{\bar{\varphi}} HN/N \quad \text{Homo.}$$

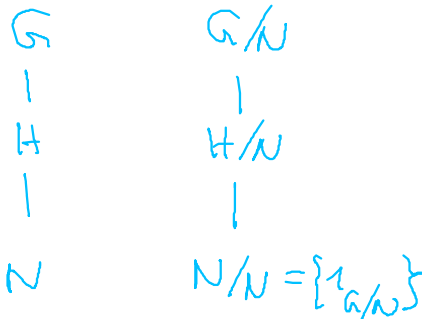
injektiv ...
 $\text{Bild}(\bar{\varphi}) = \{hN \mid h \in H\} = HN/N.$
 \Rightarrow surjektiv, qed.

1.9.6 Zweiter Isomorphiesatz: (a) Die Untergruppen von G/N sind genau die Gruppen H/N für alle Untergruppen $H < G$ mit $N \subset H$.

(b) Für solches H ist H/N normal in G/N genau dann, wenn H normal in G ist.

(c) In diesem Fall haben wir einen Isomorphismus

$$G/H \xrightarrow{\sim} (G/N)/(H/N), \quad gH \mapsto (gN)(H/N).$$



Bew. (a) Sei $N \subset H < G \Rightarrow H/N = \{hN \mid h \in H\} \subset G/N$
 $1_{G/N} = N \in H/N$
 $\forall h, k \in H: (hN)(kN) = hkN \in H/N$
 $k^{-1}N = (kN)^{-1} \in G/N$

Umgekehrt: Sei $\bar{H} < G/N$. Setze $H := \{h \in G \mid hN \in \bar{H}\}$.
 $= \pi^{-1}(\bar{H})$ für den Homo: $\pi: G \rightarrow G/N$
 $\Rightarrow H < G$ mit $H/N = \bar{H}$.

(b) H/N normal $\Leftrightarrow \forall g \in G: g^N(H/N) = H/N$

Sei $h \in H$ beliebig $\Rightarrow g^N(hN) = (gN) \cdot (hN)(gN)^{-1} = ghg^{-1}N \in H/N$.

$\Leftrightarrow \forall g \in G: g^N(H/N) = H/N$

$\Leftrightarrow \forall g \in G: g^N H = H \Leftrightarrow H \triangleleft G$.

$\forall g \in G: g \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow gN \in H/N \Leftrightarrow g \in H$,

$\Rightarrow \varphi$ faktorisiert durch einen injektiven Homo $\bar{\varphi}: G/H \rightarrow \frac{G/N}{H/N}$.

Dies ist surjektiv $\Rightarrow \bar{\varphi}$.

$$(c) \quad G \xrightarrow{\quad} G/N \xrightarrow{\quad} \frac{G/N}{H/N}$$

φ

Zwangsweise Homo.
injektiv.

ged.

1.9.7 Definition-Proposition: Eine bijektive Abbildung einer Menge X in sich heisst eine Permutation von X . Sei $S(X)$ die Menge aller Permutationen von X . Dann ist $(S(X), \circ, \text{id}_X)$ eine Gruppe, genannt die symmetrische Gruppe der Menge X .

$$S_n = S_{\{1, \dots, n\}}$$

projektiver Raum

1.9.8 Beispiel: Sei k ein Körper und $n \geq 0$. Sei $\mathbb{P}^n(k)$ die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume des Raums der Spaltenvektoren k^{n+1} . Dann ist

$$\varphi: \underline{\text{GL}_{n+1}(k)} \rightarrow \underline{S(\mathbb{P}^n(k))}, \quad A \mapsto \underline{(U \mapsto AU)}$$

ein Homomorphismus mit dem Kern $k^\times I_{n+1}$; wir erhalten somit einen Isomorphismus der projektiven linearen Gruppe

$$\underline{\text{PGL}_{n+1}(k)} := \underline{\text{GL}_{n+1}(k) / k^\times I_{n+1}} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Bild}(\varphi)} < \underline{S(\mathbb{P}^n(k))}.$$

$$A \in \text{Kern}(\varphi) \Leftrightarrow \forall v \in k^{n+1} \setminus \{0\}: Av = \lambda v \text{ für ein } \lambda \in k^\times$$

Nächste Abschnitte: Homom' : $G \rightarrow S_X$.

lineare Darstellung von G : Homom' : $G \rightarrow \text{GL}_n(k)$ }