Seien $a, b \in R$. Wir sagen $a \mid b :\Longleftrightarrow \exists c \in R: a \cdot c = b$.

$a \cdot 0 = 0$

2.7 Integritätsbereiche

2.7.1 Definition: Ein *Nullteiler von R* ist ein Element $x \in R \setminus \{0\}$ mit

$$\exists y \in R \setminus \{0\}: \; xy = 0.$$

2.7.2 Definition: Ein Ring mit $1 \neq 0$ und ohne Nullteiler heisst ein *Integritätsbereich.*

2.7.3 Äquivalent: Für alle $n \geqslant 0$ und $a_i \in R \setminus \{0\}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ ist $\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

Beweis: 2.7.3 $\Rightarrow$ 2.7.2: $n = 0, 2$.
" $\Leftarrow$ " : Induktion über n. $n \mapsto n+1$: $a_1, \ldots, a_{n+1} \neq 0$
$\Rightarrow a_1 \cdots a_n \neq 0$
$\Rightarrow (a_1 \cdots a_n) a_{n+1} \neq 0$. qed.

2.7.4 Proposition: In jedem Integritätsbereich gilt die *Kürzungsregel*:

$$\forall x, y, z \in R: \; (x \neq 0 \text{ und } xy = xz) \longrightarrow y = z.$$

Bew.: $xy = xz \Rightarrow x(y-z) = xy - xz = 0$, $x \neq 0$, R nullteilerfrei $\Big\} \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z$.

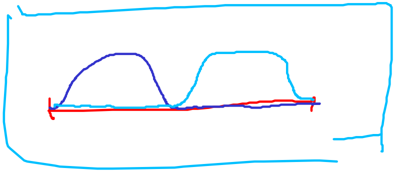
qed.

2.7.5 Beispiel: Jeder Körper ist ein Integritätsbereich.

2.7.6 Beispiel: Jeder Unterring eines Integritätsbereichs ist ein Integritätsbereich.

Folge: Jeder Unterring eines Körpers ist ein Integritätsbereich. z.B. $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

2.7.7 Proposition: Für jeden Integritätsbereich R ist auch $R[X]$ und $R[[X]]$ ein Integritätsbereich.



Bem.: Für $R[X]$: $1 \neq 0$ in R $\Rightarrow$ in $R[X]$.

$f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$, $a_i \in R$ $\Rightarrow$ $\deg(f) := \sup\{ i \geq 0 \mid a_i \neq 0 \}$.

Fakt: $\forall f, g \in R[X]$: $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ falls R Integritätsbereich.

Bew.: $f = 0 \vee g = 0 \Rightarrow fg = 0 \Rightarrow -\infty = * + (-\infty) = -\infty + * = -\infty$. ✓

Sonst: $f = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i$, $g = \sum_{j=1}^{n} b_j X^j$, $a_i, b_j \in R$, $\underbrace{a_m, b_n \neq 0}$ $\Rightarrow$ $a_m b_n \neq 0$.

$\Rightarrow fg = a_m \cdot b_n \cdot X^{m+n} +$ kleinere Terme.

$\Rightarrow \deg(fg) = m + n = \deg(f) + \deg(g)$. qed (Fakt).

$\forall f, g \in R[X]$: $f, g \neq 0 \Rightarrow \deg(f), \deg(g) \geq 0 \overset{\text{Fakt}}{\Longrightarrow} \deg(fg) \geq 0 \Rightarrow fg \neq 0$.

$R[X_1, \ldots, X_n] = R[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ $\rightsquigarrow$ Induktion über n.

$\operatorname{ord}(f) = \infty \Leftrightarrow f = 0$

$R[[X]]$: $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \rightsquigarrow \operatorname{ord}(f) := \inf\{ i \geq 0 \mid a_i \neq 0 \}$

$\Rightarrow \operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord}(f) + \operatorname{ord}(g)$.

2.8 Quotientenkörper

Sei R ein Integritätsbereich.

2.8.1 Konstruktion-Proposition: Auf der Menge der Paare $R \times (R \setminus \{0\})$ ist durch

Idee

$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Leftrightarrow xy' = x'y$

$$(x, y) \sim (x', y') \ :\Longleftrightarrow \ xy' = x'y.$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Bezeichne die Äquivalenzklasse eines Paars (x, y) mit $[(x, y)]$ und die Menge aller Äquivalenzklassen mit $\mathrm{Quot}(R)$. Dann sind die Operationen

$\frac{x}{y} + \frac{x'}{y'} = \frac{xy' + x'y}{yy'}$

$\frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} = \frac{xx'}{yy'}$

$$\begin{aligned} [(x, y)] + [(x', y')] \ &:= \ [(xy' + x'y, yy')] \\ [(x, y)] \cdot [(x', y')] \ &:= \ [(xx', yy')] \end{aligned}$$

wohldefiniert auf $\mathrm{Quot}(R)$. Betrachte weiter die Abbildung

$$\iota\colon \ R \to \mathrm{Quot}(R), \ x \mapsto [(x, 1)]$$

und bezeichne $0 := \iota(0)$ und $1 := \iota(1)$. Dann ist $(\mathrm{Quot}(R), +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper und ι ein injektiver Ringhomomorphismus.

2.8.2 Definition: Der Körper $\mathrm{Quot}(R)$ heisst der *Quotientenkörper von R.* Wir identifizieren R mit seinem Bild unter ι. In $\mathrm{Quot}(R)$ gilt dann

$$[(x, y)] \ = \ \frac{\iota(x)}{\iota(y)} \ = \ \frac{x}{y}.$$

Bew.: Transitiv: $(x,y)\sim(x',y')\sim(x'',y'') \Rightarrow xy'=x'y \wedge x'y''=x''y'$

$\Rightarrow \underbrace{xy'}_{\substack{\| \\ xy''\cdot y'}}y''=x'yy''=y\underbrace{x'y''}=yx''y' \xRightarrow{y'\neq 0} xy''=yx'' \Rightarrow (x,y)\sim(x'',y'')$.

⊛ Inverses zu $[\overset{\overset{0}{\#}}{(x,y)}]$: $[(x,y)]\cdot[(y,x)]=[(xy,xy)]=[(1,1)]=\iota(1)$

$\forall x\in R$: $[(x,1)]\overset{!}{=}0=[(0,1)] \Leftrightarrow (x,1)\sim(0,1) \Leftrightarrow x\cdot 1=0\cdot 1 \Leftrightarrow x=0$.

$\Rightarrow \ker(\iota)=\{0\} \Rightarrow \iota$ injektiv.

$$\frac{\iota(x)}{\iota(y)}=\frac{[(x,1)]}{[(y,1)]}=[(x,1)]\cdot[(1,y)]=[(x,y)].$$

qed

2.8.3 Proposition: *(Universelle Eigenschaft)* Für jeden injektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to K$ in einen Körper K existiert genau ein Körperhomomorphismus $\tilde\varphi\colon \operatorname{Quot}(R) \to K$ mit $\tilde\varphi \circ \iota = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & K \\
& \operatorname{Quot}(R) \arrow[ur, dotted, "\tilde\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Bew.: Sei ein solches $\tilde\varphi$ gegeben. Dann ist $\tilde\varphi([(x,y)]) = \tilde\varphi\left(\frac{\iota(x)}{\iota(y)}\right) = \frac{\tilde\varphi(\iota(x))}{\tilde\varphi(\iota(y))} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$.

$\Rightarrow \tilde\varphi$ eindeutig.

Umgekehrt: $[(x,y)] = [(x',y')] \Rightarrow xy' = x'y \Rightarrow \varphi(x)\varphi(y') = \varphi(xy') = \varphi(x'y) = \varphi(x')\varphi(y)$

ι injektiv, $y, y' \neq 0 \Rightarrow \iota(y), \iota(y') \neq 0 \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = \frac{\varphi(x')}{\varphi(y')}$. Daher ist $\tilde\varphi\colon \operatorname{Quot}(R) \to K$, $[(x,y)] \mapsto \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$ wohldefiniert.

$\tilde\varphi([(x,1)]) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(1)} = \frac{\varphi(x)}{1} = \varphi(x)$. Rechne nach: $\tilde\varphi$ ist Homo.

qed

2.8.4 Bemerkung: Man könnte den Quotientenkörper auch durch die universelle Eigenschaft abstrakt definieren und zeigen, dass er durch diese bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt ist.

2.8.5 Folge: *(Funktorialität)* Jeder injektive (und nur jeder solche) Ringhomomorphismus von Integritätsbereichen $\varphi\colon R \to S$ setzt sich fort zu einem eindeutigen Ringhomomorphismus $\tilde\varphi\colon \operatorname{Quot}(R) \to \operatorname{Quot}(S)$.

Bew.:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\iota"'] \arrow[dr] & S \arrow[d, hook, "\iota'"] \\
\operatorname{Quot}(R) \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \operatorname{Quot}(S)
\end{tikzcd}$$

2.8.6 Beispiel: Der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \mathrm{Quot}(\mathbb{Z})$. $\subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

2.8.7 Beispiel: Es ist $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}[i]) \cong \mathbb{Q}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$.

$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.

$\mathbb{Q}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

$= \{\frac{a+bi}{c} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}, c \neq 0\}$

$\mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Q}[i]$ = Körper.

$\downarrow$

$\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}[i])$ $\exists!$ $\nearrow$ injektiv. ✓

surjektiv: Jedes $\frac{a+bi}{c}$ ist im Bild. qed.

2.8.8 Definition: Für jeden Körper K heisst $K(X_1,\ldots,X_n) := \mathrm{Quot}(K[X_1,\ldots,X_n])$ der Körper der *rationalen „Funktionen" in den Variablen $X_1,\ldots,X_n$ über K.*

$= \{\frac{f}{g} \mid f,g \in K[X_1,\ldots,X_n], g \neq 0\}$

2.8.9 Beispiel: In der Funktionentheorie definiert man den Körper der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dieser stellt sich heraus als der Quotientenkörper des Unterrings der holomorphen Funktionen.

Arbeit in $\mathbb{C}$

$\frac{1}{z} + \left(\frac{-1}{z}\right) = 0$

Bsp.: $K[[X]] = \{\sum_{i \geq 0} a_i X^i \mid \text{alle } a_i \in K\}$

$\cap$

$K((X)) = \{\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \mid \text{alle } a_i \in K, \exists n \forall i < n: a_i = 0\}$.

$\|$

Körper. $= \{X^n \cdot \sum_{i \geq 0} a_i X^i \mid \text{alle } a_i \in K, n \in \mathbb{Z}\}$.

$\Rightarrow K((X)) = \mathrm{Quot}(K[[X]])$

$R[[X]][\frac{1}{X}] = \{X^n \cdot \sum_{i \geq 0} a_i X^i \mid \text{alle } a_i \in R, n \in \mathbb{Z}\}$