Gerade ziehen
Kreis ziehen, Schnittpunkte bilden.

Erinnerung:

Für jede Menge A von Punkten sei $\mathrm{Kons}(A)$ die Menge aller Schnittpunkte, die man durch iterierte Anwendung dieser Operationen aus A konstruieren kann. Die Abstände $d(P,Q)$ für alle Punkte $P,Q \in \mathrm{Kons}(A)$ heissen die *aus A konstruierbaren Längen*. Die Winkel $\sphericalangle PQR$ für alle paarweise verschiedenen Punkte $P,Q,R \in \mathrm{Kons}(A)$ heissen die *aus A konstruierbaren Winkel*. Unser Ziel ist es, die Menge $\mathrm{Kons}(A)$ und die Menge aller aus A konstruierbaren Längen bzw. Winkel zu beschreiben.

Um dieses geometrische Problem zu algebraisieren, identifizieren wir die euklidische Ebene mit $\mathbb{C}$ mit dem üblichen Abstand $d(P,Q) := |P-Q|$. Damit man überhaupt neue Punkte konstruieren kann, nehmen wir an, dass A mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Durch Translation, Drehung und Streckung reduzieren wir uns dann darauf, dass A mindestens die Punkte 0 und 1 enthält.

3.5.1 Satz: Dann ist $\mathrm{Kons}(A)$ der eindeutige kleinste Unterkörper $K \subset \mathbb{C}$ mit

(a) $A \subset K$.

(b) $\forall z \in K\colon\ \overline{z} \in K$.

(c) $\forall z \in \mathbb{C}\colon\ z^2 \in K \longrightarrow z \in K$.

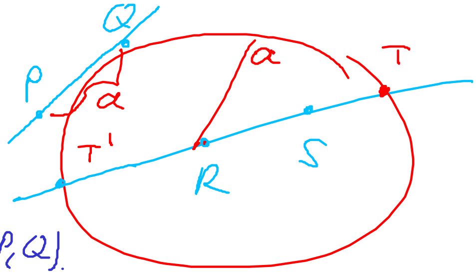
Weiter gilt:

(d) Die aus A konstruierbaren Längen sind genau die Zahlen in $\mathrm{Kons}(A) \cap \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

(e) Die aus A konstruierbaren Winkel sind genau die $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\cos\alpha \in \mathrm{Kons}(A)$.

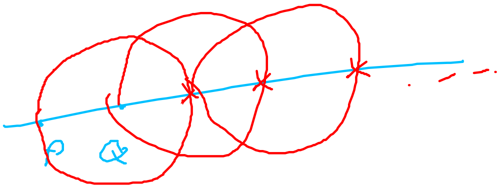
Beweis: Wir können:

① Eine gegebene Länge auf einer Geraden abtragen.

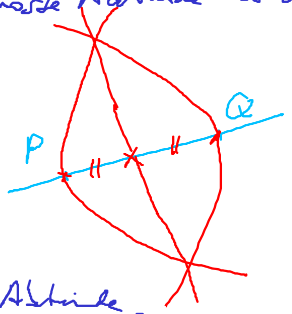


P, Q, R, S gegeben ⇝ Finde $T \neq T'$ auf RS
mit $d(R,T) = d(R,T') = d(P,Q)$.

② Iterieren ⇝ beliebig grosse Abstände konstruieren:

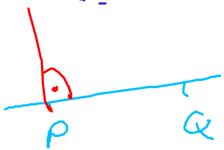


③ Strecke halbieren



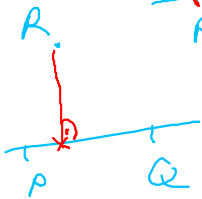
④ Iterieren ⇝ beliebig kleine Abstände.

⑤ Senkrechte errichten:

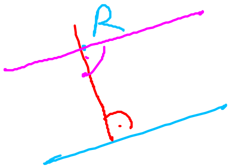


wie in ③

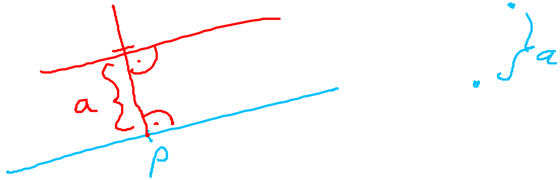
⑥ Lot fällen



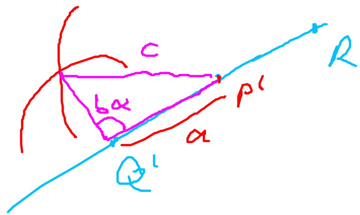
⑦ Parallele durch Punkt konstruieren.
Wende ⑥ und ⑤ an.



⑧ Parallele mit gegebenem Abstand ziehen



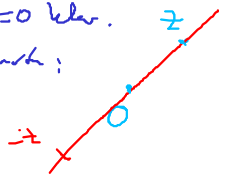
⑨ Winkel woanders abtragen.



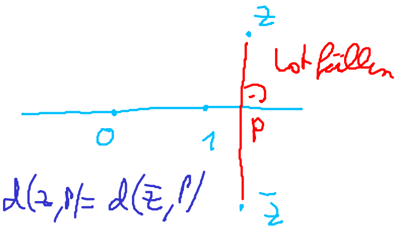
Setze $K := \mathrm{Konstr}(A)$.

$\boxed{1}$ $\forall z \in K: -z \in K$.

$z=0$ klar. sonst:



$\boxed{2}$ $\forall z \in K: \bar{z} \in K$



$d(z,p) = d(\bar{z},p)$

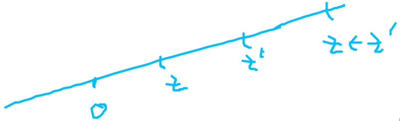
$z \neq \bar{z}$,

$zp = \bar{z}p$.

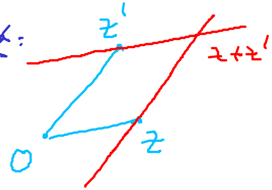
$\boxed{3}$ $\forall z,z' \in K: z+z' \in K$:

$z=0$ oder $z'=0$ ✓.

Sonst: $0,z,z'$ kollinear $\Rightarrow$ (1)

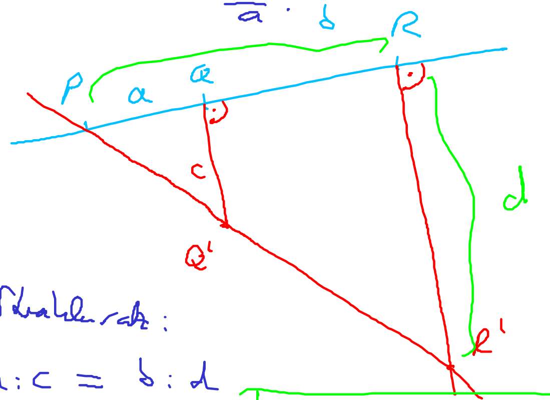


Sonst:



Ziehe Parallelen.

$\boxed{4}$ Sind Längen $a,b,c>0$ konstruierbar, so auch $\frac{bc}{a}$.



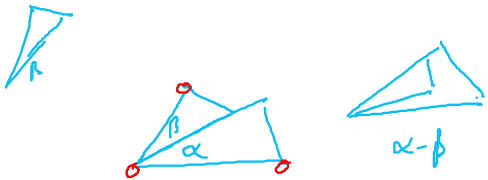
Strahlensatz:

$a:c = b:d$

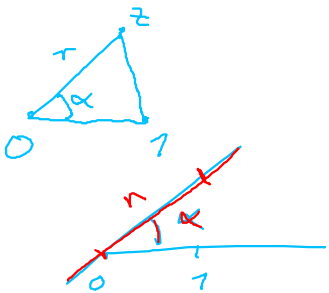
$\Rightarrow d = \frac{bc}{a}$.

Insbesondere für $a=1$ oder $c=1$.

$\boxed{5}$ Winkel α, β konstruierbar $\Rightarrow \alpha \pm \beta$ auch.



$\boxed{6}$ $z = re^{i\alpha}$ konstruierbar $\Longleftrightarrow$ Länge r und Winkel α konstruierbar.

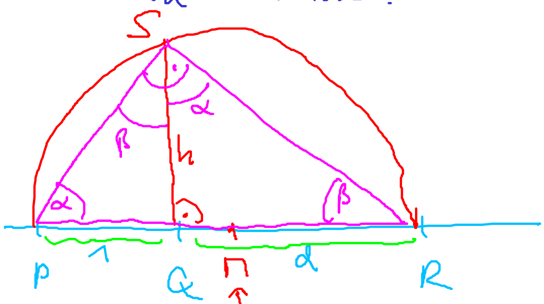


$\boxed{7}$ $z,z' \in K \Rightarrow z \cdot z' \in K$ und $z' \neq 0 \Rightarrow z/z' \in K$.

$\boxed{4}$ – $\boxed{6}$.

$\boxed{8}$ Länge d konstruieren

$\Rightarrow \sqrt{d}$ konstruieren.



Mittelpunkt von $\overline{PR}$

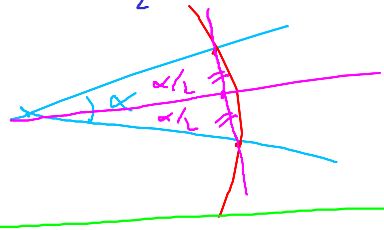
Thales $\Rightarrow \Delta PQS$ ähnlich zu ΔSQR.

$\Rightarrow 1 : h = h : d$

$\Rightarrow h^2 = d \Rightarrow h = \sqrt{d}$

$\boxed{9}$ Winkel α konstruierbar

$\Rightarrow \alpha/2$ auch



$\boxed{10}$ $\left.\begin{array}{l} z \in K \\ w \in \mathbb{C} : w^2 = z \end{array}\right\} \Rightarrow w \in K.$

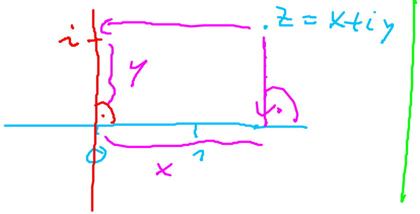
$z = r e^{i\alpha}$

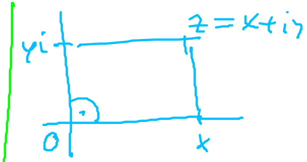
$w = \sqrt{r} \cdot e^{i\alpha/2}$

$\boxed{8} \rightsquigarrow \boxed{9}$ ✓

Damit ist gezeigt: K ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ mit den Eigenschaften (a) − (c).

(1) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \quad x+iy \in K \iff x,y \in K.$





(3) Kreis mit Radius r um $P = a+bi$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$P, r \in K \Rightarrow$ Koeff. in K.

(2) $\left.\begin{array}{l} z = a+bi \in K \\ z' = a'+b'i \in K \\ \text{verschieden} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Geradengleichung

$$g = \left\{ x+iy \;\middle|\; \det\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ a' & b' & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

$z, z' \in K \Rightarrow a, b, a', b' \in K$

$\Rightarrow$ Koeffizienten dieser Gleichung $\in K$.

(4) Schnitt zweier Geraden nicht parallel

$g: \; ax+by+c=0 \qquad \left.\begin{array}{l} a,b,c \\ a',b',c' \end{array}\right\} \in K. \quad \Updownarrow$

$g': \; a'x+b'y+c'=0 \qquad \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0.$

$\Rightarrow$ Löse LGS $\Rightarrow x, y \in K.$

(5) $\left.\begin{array}{l} g: \; ax+by+c=0 \\ \text{Kreis}: \; q(x,y)=0 \end{array}\right\}$ Koeff. in K. quadratische Gleichung.

Löse nach x oder y auf

Setze in q ein $\Rightarrow$ quadratische Gleichung

in einer Variable mit Koeff. in K.

Mitternachtsformel $\Rightarrow$ Quadratwurzel aus El. in K.

(6) Zwei Kreise: $q(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$

$$q'(x,y) = (x-a')^2 + (y-b')^2 - r'^2$$

$$\Rightarrow l := q - q' = 2(a'-a)x + 2(b'-b)y + \text{const}.$$

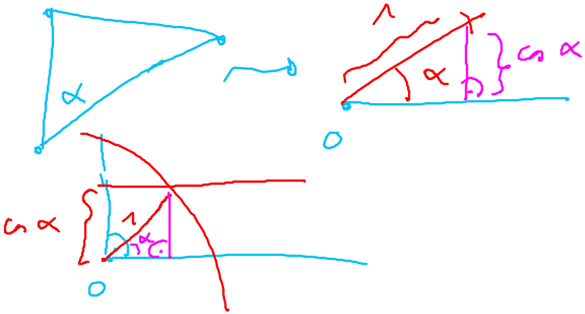
Rest analog zu (5).

qed (Satz).

(d) Abtragen auf reeller Achse

(e) Winkel α konstruierbar

$\iff \cos\alpha \in K$.



3.5.2 Satz: Setze $\overline{A} := \{\overline{a} \mid a \in A\}$. Dann ist $\mathrm{Kons}(A)$ die Vereinigung aller Körper $L \subset \mathbb{C}$, für die ein Körperturm der Form

$$L = K_n/\dots/K_1/K_0 = \mathbb{Q}(A \cup \overline{A})$$

existiert mit $[K_i/K_{i-1}] = 2$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

3.5.3 Folge: Jedes Element von $\mathrm{Kons}(A)$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}(A \cup \overline{A})$ und sein Grad über $\mathbb{Q}(A \cup \overline{A})$ ist eine Zweierpotenz.

Bew.: $x \in \mathrm{Kons}(A) \Rightarrow \exists K_n$ wie oben mit $x \in K_n$. $\Rightarrow K_0(x) \subset K_n$.

$\Rightarrow [K_0(x)/K_0] \mid [K_n/K_0] = [K_n/K_{n-1}] \cdots [K_1/K_0] = 2^n$ qed.

Beweis von 3.5.2: Sei $x \in \mathrm{Kons}(A)$. $\Rightarrow \exists n \; \exists x_1, \dots, x_n \in \mathrm{Kons}(A)$ so dass jedes x_i aus $A \cup \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ entsteht durch $\pm, \cdot, \div, \overline{(\;)}, \sqrt{\cdot}$.

$K_0 := \mathbb{Q}(A \cup \overline{A})$

$K_i := K_0(x_1, \dots, x_i)$

$\Rightarrow \forall i$: * $K_i = K_{i-1}$ falls x_i durch $\pm, \cdot, \div$ entsteht.

* $[K_i/K_{i-1}] \leq 2$ falls x_i durch $\sqrt{\;}$ entsteht.

* falls x_i durch $\overline{(\;)}$ entsteht; Setze $\overline{K_j} := \{\overline{z} \mid z \in K_j\}$

$\Rightarrow x_i \in \overline{K_{i-1}}$. Dann ist $K_0 = \overline{K_0} \subset \overline{K_1} \subset \dots \subset \overline{K_{i-1}}$

ein Körperturm mit $\forall j < i$: $[\overline{K_j}/\overline{K_{j-1}}] \leq 2$.

$$K_{i-1} = \underbrace{K_{i-1}\overline{K_0}}_{L_0} \subset \underbrace{K_{i-1}\overline{K_1}}_{L_1} \subset \dots \subset \underbrace{K_{i-1}\overline{K_{i-1}}}_{L_{i-1}} \ni x_i$$

$\Rightarrow \forall j < i: \; [L_j / L_{j-1}] \leq [\bar{K}_j / \bar{K}_{j-1}] \leq 2.$

Daraus folgt: Jedes $x \in \mathrm{Norm}(A)$ ist in einem solchen L enthalten.

Umgekehrt: Jedes solche L ist in $\mathrm{Norm}(A)$ enthalten. qed.

3.5.4 Satz: *(Verdoppelung des Würfels)* Es gibt kein endliches Verfahren mit Zirkel und Lineal, um die Zahl $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren.

$$\left.\begin{array}{l} A = \{0,1\}. \\ \mathbb{Q}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{Q} \\ x^3 - 2 \text{ irred.} \end{array}\right\} \Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}] = 3. \Rightarrow \sqrt[3]{2} \notin \text{Kons}(A).$$

3.5.5 Satz: *(Dreiteilung des Winkels)* Es gibt kein endliches Verfahren mit Zirkel und Lineal, um aus einem beliebigen Winkel α den Winkel $\frac{\alpha}{3}$ zu konstruieren.

$\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(A \cup \bar{A})$ für $A = \{0,1\}$.

$\omega := 2\cos\frac{\pi}{9}$ hat Min. Pol. von Grad 3 über $\mathbb{Q}$.

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\cos\frac{\pi}{9})/\mathbb{Q}] = 3. \Rightarrow \cos\frac{\pi}{9} \notin \text{Kons}(A) \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\alpha}{3}$ nicht konstruierbar.

3.5.6 Satz: *(Quadratur des Kreises)* Es gibt kein endliches Verfahren mit Zirkel und Lineal, um aus einem beliebigen Kreis mit Radius $r > 0$ den Kreisinhalt πr^2 zu konstruieren.

$\boxed{\pi r^2}$ $\sqrt{\pi}\, r$.

OBdA $r = 1$. ; $A = \{0,1\}$.

$\mathbb{Q}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{Q}$.

$[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})/\mathbb{Q}] = \infty$ da $\sqrt{\pi}$ transzendent, da π transzendent. $\Rightarrow$ nicht konstruierbar.