**Aufgabe 1.1.**
Man erinnert sich an die Definition einer offener Menge:

*Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst* ***offen****, falls für jeden Punkt $x_0 \in \Omega$ $\exists r > 0$ s. d.*

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} \subseteq \Omega.$$

(a) Beweise die folgenden Eigenschaften offener Mengen:

i) $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind offen;
ii) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2$ offen;
iii) $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ offen (hier ist $I$ eine beliebige Indexmenge).

Zudem erinnert man sich daran:

*eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst* ***abgeschlossen****, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.*

(b) Beweise die folgenden Eigenschaften abgeschlossener Menge:

i) $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen;
ii) $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ abgeschlossen;
iii) $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen (hier ist $I$ nochmals eine beliebige Indexmenge).

**Aufgabe 1.2.**

(a) Zeige, dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen im Allgemeinen nicht offen ist.

(b) Zeige, dass die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

**Aufgabe 1.3.**

(a) Sei $A$ eine fixe Teilmenge von $X$. Bestimme die von $\{A\}$ erzeugte $\sigma$-Algebra von Teilmengen von $X$.

(b) Sei $X$ unendlich. Sei

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, aber keine $\sigma$-Algebra.

(c) Sei $X$ überabzählbar[1]. Sei

$$\mathcal{S} = \{E \subset X : E \text{ oder } E^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{S}$ eine $\sigma$-Algebra ist und dass $\mathcal{S}$ von den einpunktigen Teilmengen von $X$ erzeugt wird.

[1] Eine Menge ist genau dann überabzählbar, wenn ihre Kardinalität (die bei endlichen Mengen der Anzahl der Elemente entspricht) grösser ist als die der Menge der natürlichen Zahlen.

**Aufgabe 1.4.**
Es seien $X$ und $Y$ Mengen und $f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung.

(a) Wenn $\mathcal{B}$ eine $\sigma$-Algebra auf $Y$ ist, zeige, dass

$$\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\}$$

eine $\sigma$-Algebra auf $X$ ist.

(b) Wenn $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$ ist, zeige, dass

$$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

eine $\sigma$-Algebra auf $Y$ ist.

**Aufgabe 1.5.**
Sei $X$ eine Menge sowie $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie von Teilmengen von $X$.

(a) Beweise die folgenden Gleichungen:

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \Big\{x \in X \;\Big|\; \forall N \geq 1, \exists n \geq N : x \in A_n\Big\}$$
$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \Big\{x \in X \;\Big|\; \exists N \geq 1, \forall n \geq N : x \in A_n\Big\}$$

(b) Beweise die Inklusion $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

(c) Es sei $X = \{1, 2, \ldots, 6\}^{\mathbb{N}}$ und $A_m = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \mid x_m = 6\}$. Interpretiert man $X$ als die Menge aller möglichen Ergebnisse, wenn man einen Würfel unendlich oft wirft, und $A_m$ als die Teilmenge derjenigen Ergebnisse, bei denen der $m$-te Wurf eine 6 ist, wie kann man $\limsup A_n$ und $\liminf A_n$ interpretieren?

**Aufgabe 1.6.**
Sei $\mu$ ein Mass auf der Menge $X$, und sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Teilmengen von $X$, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Betrachte die Menge

$$E = \{x \in X : x \text{ liegt in } A_n \text{ für unendlich viele } n\} = \limsup_{n\to+\infty} A_n.$$

Zeige, dass $\mu(E) = 0$.