**Aufgabe 2.1.**
Beweise, dass das Mengensystem der Elementarfiguren

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle}\}$$

eine Algebra ist[1].

**Aufgabe 2.2.**
Es sei $(X, \Sigma, \mu)$ ein Massraum. Eine Teilmenge $A \in \Sigma$ heisst $\mu$-*Atom*, falls $\mu(A) > 0$ und für alle $B \in \Sigma$ mit $B \subset A$, entweder $\mu(A \setminus B) = 0$ oder $\mu(B) = 0$ gilt. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $A$ ein $\mu$-Atom und $B \in \Sigma$ mit $B \subset A$. Dann gilt entweder $\mu(B) = \mu(A)$ oder $\mu(B) = 0$.

(b) Es sei $A \in \Sigma$ mit $0 < \mu(A) < \infty$. Zudem gelte für alle $B \in \Sigma$ mit $B \subset A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A) = \mu(B)$. Dann ist $A$ ein $\mu$-Atom.

(c) Es sei $\mu$ $\sigma$-endlich, d.h. es existiert eine abzählbare Familie $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, sodass $\mu(S_j) < \infty$ für alle $j$ und $X = \bigcup_j S_j$ ist. Zeige, dass für alle $\mu$-Atome $A$, $\mu(A) < \infty$ gilt.

**Aufgabe 2.3.**
Es sei $X$ eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{B} := \left\{ E \subset X \;\middle|\; E \text{ oder } E^c \text{ abzählbar } \right\}$$

Zeige, dass $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ mit

$$\mu(E) := \begin{cases} 0 & \text{falls } E \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Prämass auf $\mathcal{B}$ definiert[2].

**Aufgabe 2.4.**
Es sei $X$ eine Menge und $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Mass auf $X$. Wir schreiben $\mathcal{A}_\mu$ für die $\sigma$-Algebra der $\mu$-messbaren Teilmengen von $X$. Sei $B \subset X$ eine beliebige Teilmenge.

(a) Sei $\mu \llcorner B$ die Einschränkung von $\mu$ auf $B$ gegeben durch:

$$\forall A \subset X : \quad \mu \llcorner B(A) := \mu(A \cap B).$$

Zeige, dass $\mu \llcorner B$ ein Mass ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{A}_\mu$ eine Teilmenge der $\sigma$-Algebra der $\mu \llcorner B$-messbaren Mengen ist.

[1] Eine Beweisskizze wurde in der Vorlesung gegeben.
[2] Siehe Definition 1.2.19 im Vorlesungsskript.

**Aufgabe 2.5.**
Es seien $X, Y$ Mengen, $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Mass auf $X$, dessen $\sigma$-Algebra der messbaren Mengen $\mathcal{A}_\mu$ ist und es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wie kann man auf natürliche Weise ein Bildmass $f_*\mu$ auf $Y$ definieren? Zeige, dass für dieses Mass das Mengesystem[3]

$$f_*(\mathcal{A}_\mu) := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu\}$$

eine Teilmenge der $\sigma$-Algebra der $f_*\mu$-messbaren Mengen von $Y$ ist.

[3]Das ist die $\sigma$-Algebra, die in Ausgabe 1.4 aus Serie 1 eingeführt wurde.