Aufgabe 3.1.
Sei μ ein Mass auf X sowie $A \subset X$, sodass $\mu(A) < \infty$. Sei ferner $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von μ-messbaren Teilmengen von X mit $A_j \subset A$ für alle j. Zudem gelte $\mu(A_j) \geq c_0 > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Beweise:

$$\mu\Big(\limsup_{j\to\infty} A_j\Big) \geq c_0.$$

Aufgabe 3.2.
Sei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$. Sei $E \subset [0,1]$ eine Lebesgue-messbare Menge mit positivem Lebesgue-Mass, also $\lambda(E) > 0$. Zeige, dass für jedes δ, $0 \leq \delta \leq \lambda(E)$, eine messbare Teilmenge von E existiert, sodass diese Teilmenge exakt das Mass δ hat.

Hinweis: Betrachte die Funktion, welche jedem $t \in [0,1]$ das Mass von $[0,t] \cap E$ zuordnet. Ist diese Funktion stetig?

Aufgabe 3.3.
Sei

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle}\}$$

die Algebra der Elementarfiguren in $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Volumen-Funktion vol aus der Vorlesung[1] auf den Elementarfiguren ein Prämass definiert.

Bemerkung: Für ein Intervall $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ in $\mathbb{R}^n$ ist das Volumen durch

$$\mathrm{vol}(I) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{vol}(I_k)$$

gegeben, wobei $\mathrm{vol}(I_k)$ die Länge des eindimensionalen Intervalles I_k ist.

Aufgabe 3.4.
Sei X eine beliebige Menge mit mehr als ein Element und betrachte das Mass $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ gegeben durch:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gib ein Beispiel einer nicht μ-messbaren Teilmenge.

[1]Definition 1.3.1 im Skript.