Aufgabe 4.1.
Zeige, dass das Lebesgue-Mass invariant unter Translationen, Spiegelungen und Rotationen, also unter allen Bewegungen der Form

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(x) = x_0 + Rx,$$

für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R \in O(n)$, ist.

Hinweis: Es kann die Invarianz des Jordan-Masses verwendet werden, siehe Satz 9.3.2. in Struwe's Skript.

Aufgabe 4.2.
Zeige: Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Borel-Menge und eine Lebesgue-Nullmenge.

Aufgabe 4.3.
Zeige, dass die offene Kugel $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < r\}$ und die abgeschlossene Kugel $\overline{B(x,r)} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| \leq r\}$ Jordan-messbar sind mit Jordanschem Mass $c_n r^n$, wo $c_n > 0$ eine nur von n abhängige Kostante ist.

Aufgabe 4.4.

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit Lebesgue-Mass $\mathcal{L}^1(A) > 0$. Zeige, dass eine Teilmenge $B \subset A$ existiert, welche **nicht** $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

(b) Finde ein Beispiel einer abzählbaren, paarweise disjunkten Familie $\{E_k\}_k$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodass:

$$\mathcal{L}^1\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) < \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(E_k).$$

Aufgabe 4.5.
Fixiere $0 < \beta < 1/3$ und definiere $I_1 = [0,1]$. Für alle $n \geq 1$, entferne aus den Teilintervallen von I_n jeweils ein zentriertes Teilintervall der Länge β^n, daraus $I_{n+1} \subset I_n$ gebildet ist. Dann definieren wir $C_\beta = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, die *verallgemeinerte Cantor-Menge* entsprechend β.

Zeige, dass:

(a) C_β Lebesgue-messbar ist mit $\mathcal{L}^1(C_\beta) = 1 - \frac{\beta}{1-2\beta}$.

(b) C_β nicht Jordan-messbar ist. Allerdings gilt es $\underline{\mu}(C_\beta) = 0$ und $\overline{\mu}(C_\beta) = 1 - \frac{\beta}{1-2\beta} > 0$.