Aufgabe 5.1.
Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Cantor Menge C überabzählbar ist. Zur Erinnerung: Jedes $x \in [0,1]$ kann zur Basis 3 entwickelt werden, d.h. $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x)\frac{1}{3^i}$ für $d_i(x) \in \{0,1,2\}$. Die Cantor Menge C ist dann durch jene $x \in [0,1]$ definiert, welche keine Koeffizienten 1 zur Basis 3 haben, also:

$$C := \{x \in [0,1] \mid d_i(x) \in \{0,2\}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Die Cantor-Lebesgue Funktion F ist nun wie folgt definiert:

$$F : C \to [0,1], \quad F\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

(a) Zeige dass $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$.

(b) Zeige dass F wohldefiniert und stetig auf C ist.

(c) Zeige dass F surjektiv ist.

(d) Schliesse daraus, dass C überabzählbar ist.

Aufgabe 5.2.
Sei E die Menge aller Zahlen in $[0,1]$ welche keine 7 in der Dezimaldarstellung bezüglich der Basis 10 haben.

Bemerke, dass es auch zwei verschiedene Darstellungen geben kann. Wir machen hier die Konvention, nur jene Darstllungen zu betrachten, welche von keiner Nachkommastelle an identisch null sind. Wir schreiben also $\frac{27}{100}$ als $0,269999....$ und nicht $0,27$.

Beweise, dass E Lebesgue-messbar ist und berechne das Lebesgue-Mass.

Aufgabe 5.3.
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Konstante L. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq s < +\infty$. Zeige, dass:

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$$

Aufgabe 5.4.
Sei C die in der Vorlesung definierte Cantor-Menge. Beweise, dass gilt:

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} =: s,$$

und ferner $2^{-s-1} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 2^{-s}$.