Aufgabe 6.1.
Seien $s \geq 0$ and $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren das Mass

$$\mathcal{H}^s_\infty(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in I} r_k^s \mid A \subset \bigcup_{k \in I} B(x_k, r_k),\ r_k > 0 \right\},$$

wobei die Indexmenge I höchstens abzählbar ist. Beweise, dass $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$ auf $\mathbb{R}$ nicht Borelsch ist.

Bemerkung. Die Definition von $\mathcal{H}^s_\infty$ stimmt mit Definition 1.8.1 in dem Skript für $\delta = \infty$.

Aufgabe 6.2.
Beweise die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{L}^n$ ist ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{H}^s$ für $s < n$ ist kein Radonmass, für $s \geq n$ aber schon ein Radonmass.

(c) Falls μ ein Radonmass ist, $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, so ist auch $\mu \llcorner A$ mit

$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B), B \subset \mathbb{R}^n$$

ein Radonmass.

Aufgabe 6.3.
Zeige, dass $\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{t \geq 0 \mid \mathcal{H}^t(A) = +\infty\}$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 6.4.
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige injektive Kurve. Wir definieren die Bogenlänge von γ als

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid N \in \mathbb{N},\ a \leq t_0 \leq \ldots \leq t_N \leq b \right\}.$$

Zeige: $\mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\gamma)) = \frac{1}{2} L(\gamma)$.

Aufgabe 6.5.
Betrachte die stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(a) Zeige, dass die Bogenlänge des Graphen von f unendlich ist. Leite daraus ab, dass das $\mathcal{H}^1$-Mass der Menge

$$A := \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\}$$

unendlich ist.

Hinweis: Benutze Aufgabe 6.4 um die Bogenlänge einer Kurve mit ihrem $\mathcal{H}^1$ Mass zu verbinden.

(b) Zeige, dass $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für alle $s > 1$ gilt.

(c) Schlussfolgere daraus, dass $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 1$ gilt.