Aufgabe 7.1.
Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(i) $f^{-1}(U)$ ist μ-messbar für jedes offene $U \subset \mathbb{R}$.

(ii) $f^{-1}(B)$ ist μ-messbar für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$.

(iii) $f^{-1}((-\infty, a))$ ist μ-messbar für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7.2.
Sei (X, μ, Σ) ein Massraum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen auf X. Zeige: Die Mengen $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ und $\{x \mid f(x) < g(x)\}$ sind messbar.

Aufgabe 7.3.
Eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst Borel-messbar, falls $g^{-1}(U)$ eine Borelmenge ist für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$. Sei nun (X, μ, Σ) ein Massraum, und seien $f\colon X \to \mathbb{R}, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei f μ-messbar und g Borel-messbar ist. Zeige, dass $g \circ f$ μ-messbar ist.

Aufgabe 7.4.
In dieser Aufgabe konstruieren wir eine Lebesgue-messbare Menge, welche nicht Borelsch ist. Diese Menge wird dann verwendet um ein Gegenbeispiel einer stetigen Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einer Lebesgue-messbaren Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu geben, sodass $F \circ G$ nicht Lebesgue-messbar ist.

(a) Sei $h : [0, 1] \to [0, 1]$ die Cantor-Funktion, die die eindeutige monotone Erweiterung von der Funktion $C \to [0, 1]$, die in Aufgabe 5.1 definiert wird, ist. Hier ist $C \subset [0, 1]$ die Cantor-Menge. Definiere $g : [0, 1] \to [0, 2]$ wie folgt $g(x) := h(x) + x$. Beweise, dass g streng monoton und ein Homöomorphismus ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{L}^1(g(C)) = 1$.

Hint: Benutze die natürliche Zerlegung von $[0, 1] \setminus C$ in Intervalle im Beweis.

(c) Benutze Aufgabe 4.4 (a) um eine nicht-Lebesgue messbare Teilmenge $E \subset g(C)$ zu finden. Definiere dann $A := g^{-1}(E)$. Zeige, dass A eine Lebesgue-Nullmenge ist und daher Lebesgue-messbar.

(d) Beweise, dass A keine Borel-Menge ist.

Hint: Andernfalls wäre das Urbild von A unter stetigen Abbildungen zwangsläufig eine Borel-Menge und somit Lebesgue-messbar.

(e) Finde geeignete Funktionen F, G wie oben unter Verwendung der Mengen und Funktionen in den vorherigen Teilaufgaben, sodass $F \circ G$ nicht Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 7.5.
Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ μ-fast überall stetig (d.h. die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist eine μ-Nullmenge). Zeige, dass f μ-messbar ist.

Aufgabe 7.6.
Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass jede monotone Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ μ-messbar ist.