Aufgabe 9.1.
In dieser Aufgabe beweisen wir die Linearität, Monotonie und Wohldefiniertheit des Integrals für simple Funktionen wie in Skript, Def. 3.1.2 und Def. 3.1.3. Diese Aussagen sind wichtig, um die entsprechenden Eigenschaften des allgemeinen Integrals zu beweisen.

Bemerkung. In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass alle gegebenen simplen Funktionen wenigstens μ-integrierbar sind.

(a) Seien f, g zwei μ-messbare simple Funktionen mit Werten $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, siehe Def. 3.1.1 im Skript. Zeige, dass μ-messbare, disjunkte Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, sodass:

$$f = \sum_n a_n \chi_{A_n}, \quad g = \sum_n b_n \chi_{B_n},$$

und zeige, dass man die Menge und Werte so wählen kann, dass $A_n = B_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige, dass wenn $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \chi_{A_n}$, wobei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge von Werten (nicht notwendigerweise verschieden) und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter, μ-messbarer Teilmengen, dann:

$$\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n).$$

(c) Seien f, g μ-messbare simple Funktionen, sodass $f \leq g$ μ-fast überall. Dann gilt:

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

(d) Seien f, g μ-integrierbare simple Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $af + bg$ eine μ-integrierbare simple Funktion ist und:

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

(e) Sei f eine μ-integrierbare simple Funktion. Zeige:

$$\underline{\int} f d\mu = \overline{\int} f d\mu = \int f d\mu,$$

wobei das letzte Integral als das Integral für simple Funktionen wie in Def. 3.1.2/3.1.3 zu verstehen ist.

Aufgabe 9.2.
(a) Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen auf einer μ-messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ μ-fast überall absolut konvergiert, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |f_k| d\mu < \infty.$$

(b) Sei $\{r_k\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$; $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, für die $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist. Zeige, dass dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k |x - r_k|^{-1/2}$ absolut konvergent ist für (Lebesgue-)fast alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 9.3.
Finde ein Beispiel einer stetigen, beschränkten Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit asymptotischem Verhalten $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, für die

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p dx = \infty \ ,$$

für alle $p > 0$.

Aufgabe 9.4.
Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-summierbare Funktionen und es gelte:

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu,$$

für alle μ-messbaren $A \subset \Omega$. Zeige, dass $f \leq g$ μ-fast überall. Folgere daraus, dass wenn:

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu,$$

für alle μ-messbaren $A \subset \Omega$, dann gilt $f = g$ μ-fast überall.

Aufgabe 9.5.
Wir schreiben $f_n \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ für Lebesgue-messbare Functionen. Gib Beispiele zu den folgenden Aussagen:

(a) $f_n \to 0$ gleichmässig, aber es gilt nicht $\int |f_n| dx \to 0$.

(b) $f_n \to 0$ punktweise und im Mass, aber weder $f_n \to 0$ gleichmässig, noch $\int |f_n| dx \to 0$.

(c) $f_n \to 0$ punktweise, aber nicht im Mass.

Aufgabe 9.6.
Sei $f : \Omega \to [0,\infty]$ eine μ-messbare Funktion. Beweise die folgende Aussagen:

(a) Wenn $\int_\Omega f d\mu = 0$, dann ist $f = 0$ μ-fast überall.

(b) Wenn $\int_\Omega f d\mu < +\infty$, dann ist $f < +\infty$ μ-fast überall.