Aufgabe 10.1.
Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-summierbare Funktion und $\Omega_1 \subseteq \Omega$ eine μ-messbare Teilmenge. Zeige, dass $f_1 := f|_{\Omega_1}$ und $f\chi_{\Omega_1}$ μ-summierbar auf Ω_1 bzw. Ω sind, und dass die Gleichung

$$\int_{\Omega_1} f_1 \, d\mu = \int_{\Omega} f \, \chi_{\Omega_1} d\mu$$

gilt.

Aufgabe 10.2.
Zeige, dass wenn $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-addierbare Funktion ist und $\Omega_1 \subseteq \Omega$ eine Teilmenge mit $\mu(\Omega_1) = 0$ ist, dann ist

$$\int_{\Omega_1} f \, d\mu = 0.$$

Aufgabe 10.3.
Durch Anwendung des Satzes von Lebesgue mit dem Zählmass auf $\mathbb{N}$, zeige:

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2^{-i}}{n}\right) = 1.$$

Aufgabe 10.4.
Sei λ das Lebesgue Mass auf $\mathbb{R}$ und f eine nicht negative, integrierbare Funktion auf $(\mathbb{R}, \lambda)$. Zeige, dass die folgende Gleichung für das Lebesgue Integral gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > s\}) ds.$$

Hinweis: Zeige die Gleichung zuerst für den Fall, wenn f eine einfache Funktion ist. In diesem Fall wird eine Skizze von f und der Funktion $s \mapsto \lambda(\{f > s\})$ weiterhelfen. Interpretiere beide Seiten im Hinblick auf die Definition des Lebesgue Masses.

Aufgabe 10.5.
Sei $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2 x^2}.$$

Zeige, dass

(a) $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0, 1]$ für alle $n \geq 1$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$.

Aufgabe 10.6.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und sei $\{f_j\}$ eine Folge μ-summierbarer Funktionen $f_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, die gleichmässig gegen f konvergiert. Beweise, dass f μ-summierbar ist und dass

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega} f_j \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$$

gilt.