Aufgabe 11.1.
Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx$$

für $a\in\mathbb{R}$.

Hinweis: $\arctan x$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 11.2.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge und $f\colon\Omega\to[0,+\infty]$ eine μ-summierbare Funktion. Für alle μ-messbare Teilmenge $A\subset\Omega$, definieren wir (siehe Sektion 3.5 in dem Skript)

$$\nu(A)=\int_A f\,d\mu.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) ν ist ein Prämass auf der σ-Algebra der μ-messbaren Mengen, daher definieren wir seine Carathéodory-Hahn Erweiterung $\nu\colon\mathcal{P}(\Omega)\to[0,+\infty]$.

(b) ν ist ein Radonmass.

(c) ν ist bezüglich μ absolut stetig.

Aufgabe 11.3.
(a) Sei $f\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ eine lokal beschränkte und lokal uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f genau dann $\mathcal{L}^1$-summierbar, wenn f abslout Riemann-integrierbar nach der generalisierte Bedeutung ist (d.h., $\mathcal{R}\int_a^\infty|f(x)|dx=\lim_{j\to\infty}\mathcal{R}\int_a^j|f(x)|dx$ existiert und ist endlich). In diesem Fall haben wir

$$\int_{[a,+\infty)}f(x)d\mathcal{L}^1=\mathcal{R}\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{j\to+\infty}\mathcal{R}\int_a^j f(x)dx.$$

(b) Sei $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ die Funktion $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, die lokal beschränkt und lokal uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Zeige, dass f Riemann-integrierbar und nicht absolut Riemann-integrierbar ist, d.h., $\mathcal{R}\int_0^\infty f(x)dx<+\infty$ aber $\mathcal{R}\int_0^\infty|f(x)|dx=\infty$. Daher ist f nicht $\mathcal{L}^1$-summierbar.

Aufgabe 11.4.
Finde eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, so dass

- f_n ist uneigentlich Riemann-integrierbar und $f_n\le f_{n+1}$;
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion f, die NICHT uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Prüfe, dass Beppo Levi Satz für diese Folge hält.

Aufgabe 11.5.

(a) Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Betrachte eine Funktion $f\colon \Omega \times (a,b) \to \mathbb{R}$, für ein Interval $(a,b) \subset \mathbb{R}$, so dass:

- die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ ist μ-summierbar für alle $y \in (a,b)$;
- die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ ist in (a,b) differenzierbar, für alle $x \in \Omega$;
- es gibt eine μ-summierbare Funktion $g\colon \Omega \to [0,\infty]$, so dass $\sup_{a<y<b} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Dann ist $y \mapsto \int_\Omega f(x,y)d\mu(x)$ in (a,b) differenzierbar mit

$$\frac{d}{dy}\left(\int_\Omega f(x,y)d\mu(x)\right) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)d\mu(x)$$

für alle $y \in (a,b)$.

(b) Berechne das Integral

$$\phi(y) := \int_{(0,\infty)} e^{-x^2-y^2/x^2} d\mathcal{L}^1(x)$$

für alle $y > 0$.

Hinweis: Benutze Teil (a), um zu erhalten, dass ϕ das folgende Cauchy-Problem erfüllt:

$$\begin{cases} \phi'(y) = -2\phi(y) & \text{for } y > 0 \\ \lim_{y\to 0^+} \phi(y) = \sqrt{\pi}/2. \end{cases}$$

Aufgabe 11.6.

Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und $f, f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbare Funktionen.

(a) Zeige, dass der Satz von der dominierten Konvergenz aus dem Satz von Vitali folgt.

(b) Seien $\Omega = [0,1]$ und $\mu = \mathcal{L}^1$. Gib ein Beispiel an, in dem der Satz von Vitali angewendet werden kann, aber der Satz von der dominierten Konvergenz nicht, d.h., eine dominierende Funktion existiert nicht.

Hinweis: Betrachte die Funktionen $f_n^k(x) = \chi_{[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n})}(x)$.