Aufgabe 12.1.
Das Ziel dieser Übung ist das folgende Riemannsche Integral zu berechnen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

(a) Zeige, dass die Funktion $\Phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

wohldefiniert und überall differenzierbar ist.

(b) Berechne $\Phi'(t)$ für $t \in (0,\infty)$.

(c) Berechne $\Phi(t)$ für $t \in (0,\infty)$.

(d) Zeige, dass die Konvergenz

$$\int_0^a e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \xrightarrow{a\to\infty} \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

gleichmässig bezüglich $t > 0$ ist.

Hinweis: Dieser Teil ist technisch schwieriger. Es ist falsch, dass $\int_a^\infty \left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ gegen 0 gleichmässig konvergiert. Um die obige gleichmässige Konvergenz zu sehen, muss man die Aufhebungen des Integrals benutzen. Eine Möglichkeit ist zu sehen, dass die Summe

$$\sum_{k=m}^\infty \left|\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|$$

gegen 0 gleichmässig bezüglich $t > 0$ wenn $m \to \infty$ konvergiert.

(e) Folgere den Wert des Integrals daraus:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 12.2.
Sei $1 \le p < \infty$, und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eine gleichmässig stetige Funktion. Zeige:

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0.$$

Aufgabe 12.3.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge.

(a) (Verallgemeinerung – Höldersche Ungleichung) Betrachte $1 \le p_1,\dots,p_k \le \infty$, so dass $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \le 1$. Für Funktionen $f_i \in L^{p_i}(\Omega,\mu)$ mit $i = 1,\dots,k$, zeige, dass $\prod_{i=1}^k f_i \in L^r(\Omega,\mu)$ und

$$\left\|\prod_{i=1}^k f_i\right\|_{L^r} \le \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

(b) Falls $\mu(\Omega) < +\infty$, zeige, dass $L^s(\Omega,\mu) \subseteq L^r(\Omega,\mu)$ für alle $1 \le r < s \le +\infty$.

(c) Beweise, dass $L^s(\Omega,\mu)$ eine echte Teilmenge von $L^r(\Omega,\mu)$ für alle $1 \le r < s \le +\infty$. d.h., in Teil (b) haben wir keine Gleichheit.

Aufgabe 12.4.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < +\infty$. Betrachte eine Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, so dass $fg \in L^1(\Omega,\mu)$ für alle $g \in L^p(\Omega,\mu)$. Zeige, dass $f \in L^q(\Omega,\mu)$ für alle $q \in [1,p')$, wobei $p' = \frac{p}{p-1}$ der zu p konjugierte Exponent ist.

Aufgabe 12.5.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge.

(a) Zeige, dass jede Funktion $f \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} L^p(\Omega,\mu)$ mit $\sup_{p\in\mathbb{N}^*} \|f\|_{L^p} < +\infty$ in $L^\infty(\Omega,\mu)$ enthalten ist.

Hinweis: Benutze die Tschebyscheff-Ungleichung.

(b) Falls $\mu(\Omega) < +\infty$, zeige, dass für alle f wie in Teil (a) $\|f\|_{L^\infty} = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$ gilt.

(c) Finde eine Funktion $f \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} L^p(\Omega,\mu)$, wobei $\mu(\Omega) < +\infty$, so dass $f \notin L^\infty(\Omega,\mu)$, d.h., zeige, dass das Ergebnis von Teil (a) ohne die Annahme $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \|f\|_{L^p} < +\infty$ nicht zutrifft.

Aufgabe 12.6.
Sei $(x_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset [0,+\infty]$ eine Folge von $\mathbb{N}^2$ indiziert. Zeige, dass:

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_{n,m}.$$

Bemerkung. Für eine Folge $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset [0,+\infty]$ mit einer beliebigen Indexmenge A, definieren wir

$$\sum_{\alpha\in A} x_\alpha := \sup_{F\,\subset\, A \text{ endlich}} \sum_{\alpha\in F} x_\alpha.$$