Aufgabe 13.1.
Sei $f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Mass bezeichnet. Zeige die folgende Gleichung mithilfe des Satzes von Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty y^{p-1} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq y\}) dy.$$

Hinweis: $|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p y^{p-1} dy$.

Bemerkung. Vergleiche mit Aufgabe 10.4. Damals hatten wir den Satz von Fubini noch nicht gesehen, und daher mussten wir ein ähnliches Argument finden. Dagegen können wir jetzt diesen Satz direkt anwenden.

Aufgabe 13.2.
Definiere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2} & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist diese Funktion summierbar bezüglich des Lebesgue-Masses?

Aufgabe 13.3.
Seien $1 \leq p < +\infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Betrachte für $h \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $\tau_h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$. Zeige:

$$\|f \circ \tau_h - f\|_{L^p} \to 0 \qquad \text{für } h \to 0.$$

Hinweis: Benutze die Tatsache, dass stetige Funktionen mit kompaktem Träger dicht in L^p sind (Satz 3.7.15 im Skript).

Aufgabe 13.4.
Eine Familie $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ heisst eine *Approximation der Eins*, falls es gilt:

1. $\varphi_\varepsilon \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$ für alle $\varepsilon > 0$;
2. für alle $\delta > 0$, $\int_{\{|x| \geq \delta\}} \varphi_\varepsilon(x) dx \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

(a) Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ vorausgesetzt und definire $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\varepsilon^{-1} x)$ für $\varepsilon > 0$. Zeige, dass $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Approximation der Eins ist.

Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Approximation der Eins. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten:

(b) Wenn $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist, dann ist $f * \varphi_\varepsilon$ stetig und $(f * \varphi_\varepsilon)(x_0) \to f(x_0)$ für $\varepsilon \to 0^+$.

(c) Wenn $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gleichmässig stetig ist, dann gilt $f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty} f$ für $\varepsilon \to 0^+$.

(d) Wenn $1 \leq p < +\infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ für $\varepsilon \to 0^+$.
Hinweis: Benutze die Höldersche Ungleichung und beachte Aufgabe 13.3 und Teil (b).

Aufgabe 13.5.
Berechne die folgenden Grenzwerten:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\, dx.$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x\log(x)}{1+n^2x^2}\, dx.$$

Aufgabe 13.6.
Sei $I = [0,1]$ und betrachte die Funktion

$$f\colon I^3 \to [0,\infty],\ f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}}, & \text{falls } y \neq z, \\ \infty, & \text{falls } y = z. \end{cases}$$

Zeige, dass $f \in L^1(I^3, \mathcal{L}^3)$ gilt.

Aufgabe 13.7.
Finde eine Folge Lebesgue-messbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in [0,1]$ $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, aber trotzdem $f_n \to 0$ im Mass.