Aufgabe 1.1.
Man erinnert sich an die Definition einer offener Menge:

*Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **offen**, falls für jeden Punkt $x_0 \in \Omega$ $\exists r > 0$ s. d.*

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} \subseteq \Omega.$$

(a) Beweise die folgenden Eigenschaften offener Mengen:

i) $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind offen;

ii) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2$ offen;

iii) $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ offen (hier ist I eine beliebige Indexmenge).

Lösung:

i) Für $\varnothing$ gibt es nichts zu beweisen. Für $\mathbb{R}^n$ können wir für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $r = 1$ nehmen, da $B_1(x_0) \subset \mathbb{R}^n$.

ii) Sei $x_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ und sei $r_i > 0$, sodass $B_{r_i}(x_0) \subseteq \Omega_i$ für $i = 1, 2$. Dann setzen wir $r := \min\{r_1, r_2\} > 0$, damit gilt

$$B_r(x_0) \subseteq B_{r_i}(x_0) \subseteq \Omega_i$$

für $i \in \{1, 2\}$ und deshalb liegt $B_r(x_0)$ im Durchschnitt.

iii) Sei $\Omega := \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ und $x_0 \in \Omega$. Daher $\exists i \in I$, sodass $x \in \Omega_i$ und wir können $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq \Omega_i \subseteq \Omega$ auswählen.

Zudem erinnert man sich daran:

*eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **abgeschlossen**, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.*

(b) Beweise die folgenden Eigenschaften abgeschlossener Menge:

i) $\varnothing, \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen;

ii) $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ abgeschlossen;

iii) $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen (hier ist I nochmals eine beliebige Indexmenge).

Lösung: Alle Eigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften offener Mengen aufgrund der de-morganschen Gesetze. Genauer gesagt: i) ist trivial, ii) folgt aus

$$(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$$

und iii) folgt aus

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Aufgabe 1.2.

(a) Zeige, dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen im Allgemeinen nicht offen ist.

Lösung: Sei $n = 1$ und betrachte die offenen Mengen $\Omega_k = \left(-\frac{1}{k}, +\infty\right) \subset \mathbb{R}$ für $k = 1, 2, \ldots$. Ihr Durchschnitt ist offensichtlich das Intervall $[0, +\infty)$, das nicht offen ist, weil es kein Intervall um 0 enthält. Beachte, dass die Aussage sogar für abzählbar viele offene Mengen falsch ist.

(b) Zeige, dass die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

Lösung: Wir können als Gegenbeispiel die Komplemente der obigen Mengen nehmen: Seien $A_k = (-\infty, -\frac{1}{k}]$. Ihre Vereinigung ist offensichtlich das offene Intervall $(-\infty, 0)$, das nicht abgeschlossen ist, weil sein Komplement nicht offen ist.

Aufgabe 1.3.

(a) Sei A eine fixe Teilmenge von X. Bestimme die von $\{A\}$ erzeugte σ-Algebra von Teilmengen von X.

Lösung: Die von $\{A\}$ generierte σ-Algebra muss notwendigerweise folgende Elemente ent-halten:

$$\emptyset, A, A^c, X.$$

Da die Menge $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ bereits unter Komplementbildung und Vereinigung abgeschlossen ist, handelt es sich bereits um die von $\{A\}$ generierte σ-Algebra. □

(b) Sei X unendlich. Sei

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, aber keine σ-Algebra.

Lösung: Natürlich ist X ein Element von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ ist unter Komplementbildung abgeschlossen. Deshalb müssen wir nur beweisen, dass $\mathcal{A}$ unter Vereinigung abgeschlossen ist. Sei $A, B \in \mathcal{A}$. Falls A, B endlich sind, dann ist $A \cup B$ auch endlich, weshalb $A \cup B \in \mathcal{A}$. Falls mindestens eine zwischen A^c und B^c endlich ist, dann ist $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ endlich, weshalb $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Nun beweisen wir, dass $\mathcal{A}$ nicht eine σ-Algebra ist (für alle wahl von X). Sei $Y = \{a_n\}_n \subset X$ eine zählbar Untermenge so, dass Y^c unendlich ist. Dann definieren wir $A_n = \{a_n\}$ für alle n. Bemerke, dass $A_n \in \mathcal{A}$, weil A_n endlich ist. Dagegen sind $Y = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ und Y^c unendlich. Daher enthält $\mathcal{A}$ nicht Y. Dies beweist, dass $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra ist, weil sie unter abzählbare Vereinigung nicht abgeschlossen ist. □

(c) Sei X überabzählbar. Sei

$$\mathcal{S} = \{E \subset X : E \text{ oder } E^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist und dass $\mathcal{S}$ von den einpunktigen Teilmengen von X erzeugt wird.

Lösung: In einem ersten Schritt zeigen wir, dass $\mathcal{S}$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. Natürlich sind $\emptyset$ und X Elemente von $\mathcal{S}$. Ebenfalls offensichtlich ist, dass $\mathcal{S}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Sei nun $\{A_k\} \subset \mathcal{S}$. Falls jedes A_k höchstens abzählbar ist, dann ist $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls höchstens abzählbar, weshalb diese Vereinigung in $\mathcal{S}$ liegt. Falls A_m für einige m überabzählbar ist, dann ist das Komplement A_m^c höchstens abzählbar. Da

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c \subset A_m^c,$$

ist das Komplement von $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ höchstens abzählbar und deshalb

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}.$$

Es muss noch gezeigt werden, dass $\mathcal{S}$ von den einpunktigen Teilmengen von X erzeugt wird. Per Definition enthält $\mathcal{S}$ die einpunktigen Teilmengen von X. Ausserdem gilt für jedes Element A von $\mathcal{S}$, dass entweder A oder A^c als Vereinigung von einpunktigen Teilmengen von X geschrieben werden kann. Also kann tatsächlich jedes Element von $\mathcal{S}$ mit Hilfe von Vereinigung oder Komplementbildung durch einpunktige Teilmengen von X erzeugt werden. $\square$

Aufgabe 1.4.

Es seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung.

(a) Wenn $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist, zeige, dass

$$\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf X ist.

Lösung: Wir bezeichnen dieses Mengesystem mit $\mathcal{A}$. Beachte $X = f^{-1}(Y)$ (somit gilt $X \in \mathcal{A}$) und

$$(f^{-1}(B))^c = \{x \in X \mid f(x) \notin B\} = \{x \in X \mid f(x) \in B^c\} = f^{-1}(B^c)$$

für alle $B \in \mathcal{B}$, also ist $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung abgeschlossen. Weiterhin gilt für alle Folgen $(B_i) \subseteq \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) &= \{x \in X \mid \text{ es gibt eine natürliche Zahl } i \geq 1 \text{ so dass } f(x) \in B_i\} \\ &= \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\} \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right).\end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und alle Eigenschaften einer σ-Algebra sind erfüllt.

(b) Wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, zeige, dass

$$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

Lösung: Wir definieren $\mathcal{B} := \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$. Beachte $f^{-1}(Y) = X$, somit ist $Y \in \mathcal{B}$. Es sei $E \subset Y$, sodass $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, folgt, dass $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten ist, und somit $E^c \in \mathcal{B}$. Es sei (B_i) eine Folge in $\mathcal{B}$. Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist gilt:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A},$$

und somit ist $\mathcal{B}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen.

Aufgabe 1.5.

Sei X eine Menge sowie $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie von Teilmengen von X.

(a) Beweise die folgenden Gleichungen:

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \left\{x \in X \;\middle|\; \forall N \geq 1, \exists n \geq N : x \in A_n\right\}$$
$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \left\{x \in X \;\middle|\; \exists N \geq 1, \forall n \geq N : x \in A_n\right\}$$

Lösung: Man bemerke, dass:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} A_n &= \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} A_n \\ &= \left\{x \in X \;\middle|\forall N \geq 1 : x \in \bigcup_{n\geq N} A_n\right\} \\ &= \left\{x \in X \;\middle|\forall N \geq 1, \exists n \geq N : x \in A_n\right\}\end{aligned}$$

Die zweite Identität folgt analog. $\square$

(b) Beweise die Inklusion $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Lösung: Dies folgt sofort aus der Formulierung der letzten Teilaufgabe. $\square$

(c) Es sei $X = \{1, 2, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}$ und $A_m = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \mid x_m = 6\}$. Interpretiert man X als die Menge aller möglichen Ergebnisse, wenn man einen Würfel unendlich oft wirft, und A_m als die Teilmenge derjenigen Ergebnisse, bei denen der m-te Wurf eine 6 ist, wie kann man $\limsup A_n$ und $\liminf A_n$ interpretieren?

Lösung: $\limsup A_n$ ist die Menge derjenigen Ergebnisse, bei welchen nach einem beliebigen Zeitpunkt N eine weitere 6 in einem späteren Wurf fallen wird. Daher besteht $\limsup A_n$ aus allen Ergebnissen, bei welchen unendlich oft eine 6 gewürfelt wird. Andererseits, besteht $\liminf A_n$ aus allen Ergebnissen, bei welchen nach endlich vielen Würfen ausschliesslich 6 gewürfelt wird. $\square$

Aufgabe 1.6.

Sei μ ein Mass auf der Menge X, und sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Teilmengen von X, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Betrachte die Menge

$$E = \{x \in X : x \text{ liegt in } A_n \text{ für unendlich viele } n\} = \limsup_{n \to +\infty} A_n.$$

Zeige, dass $\mu(E) = 0$.

Lösung: Für jedes n definieren wir

$$E_n := \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Es ist leicht einzusehen, dass für jedes n die Inklusion $E \subset E_n$ gilt. Deshalb haben wir für jedes n

$$\mu(E) \leq \mu(E_n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i)$$

aufgrund der Subadditivität von μ. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) = 0,$$

weshalb

$$\mu(E) = 0$$

gelten muss. □