Aufgabe 2.1.
Beweise, dass das Mengensystem der Elementarfiguren

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle}\}$$

eine Algebra ist[1].

Lösung: Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ und dass $\mathcal{A}$ unter Komplementen und endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist.

Es ist klar, dass $\mathbb{R}^n$ ein Intervall ist (siehe die Definition im Skript, $a, b = \pm\infty$ ist erlaubt). Daher liegt es in $\mathcal{A}$. Sei nun $A = \bigcup_{k=1}^m A_k$ mit A_k disjunkten Intervallen. Die Komplemente der A_k schreiben wir als:

$$A_k^c = \bigcup_{i=1}^{p(n)} B_{k,i}$$

wobei $p(n)$ dimensionsabhängig ist und beschreibt, wieviele Intervalle man zusammensetzen muss, um das Komplement darzustellen. A_k^c liegt also in $\mathcal{A}$. Mit de Morgan ist:

$$A^c = \left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^m A_k^c \ ,$$

Es ist aber klar (weil der Schnitt zweier Intervalle wieder in Intervall ist), dass der Schnitt zweier $A, B \in \mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$ liegen muss. Damit ist $A^c \in \mathcal{A}$.

Seien schliesslich $A_k = \bigcup_{l=1}^{n_k} A_{kl}$ mit $A_{kl} \cap A_{ki} = \varnothing$ für $i \neq l$, $k = 1, \ldots, m$. Dann ist $\bigcup_{k=1}^m A_k = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{l=1}^{n_k} A_{kl}$ eine Vereinigung endlich vieler Intervalle. Diese können wir disjunkt wählen. Um dies zu sehen, betrachten wir den Fall $m = 2$, der allgemeine Fall folgt aus wiederholter Anwendung der Aussage für $m = 2$. Für alle $l \in \{1, \ldots, n_2\}$ definieren wir:

$$\tilde{A}_{2l} := A_{2l} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} A_{1j} = A_{2l} \cap \bigcap_{j=1}^{n_1} A_{1j}^c.$$

Wie zuvor gezeigt ist A_{1j}^c eine Elementarfigur und der Durchschnitt endlich vieler Elementarfiguren ist wiederum eine Elementarfigur (betrachte ihre Zerlegung in disjunkte Intervalle um dies zu sehen). Daher gilt, dass $\tilde{A}_{2l}$ eine Elementarfigur ist. Ausserdem bemerke man, dass alle $\tilde{A}_{2l}$ paarweise disjunkt sind untereinander und auch disjunkt zu den A_{1j}. Daher, indem wir die Zerlegung in disjunkte Intervalle verwenden, ist klar:

$$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}.$$

Daraus folgt, dass $\bigcup_{k=1}^m A_k \in \mathcal{A}$. Also ist $\mathcal{A}$ eine Algebra. $\square$

Ein direkterer Beweis kann wie folgt gegeben werden: wir haben nochmals endlich viele Elementarfiguren $A_1, \ldots, A_m$. Für jedes $1 \leq k \leq n$, seien

$$-\infty =: a_0^k < a_1^k < a_2^k < \ldots < a_{q_k-1}^k < a_{q_k}^k := +\infty$$

[1] Eine Beweisskizze wurde in der Vorlesung gegeben.

die endlich vielen Zahlen, die als einer der Endpunkte des k-ten Faktors I_k von einem der Intervalle $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ der Darstellung von einer A_j erscheinen.

Nämlich sei S^k, für $k \in \{1, \ldots, n\}$, die Vereinigung der Mengen der Grenzpunkte der Intervalle I_k, die der k-te Faktor von einem $I \subset A_j$ sind, zusammen mit $\pm\infty$. Da S^k eine endliche Menge ist, können wir S^k als $\{a_0^k, a_1^k, \ldots, a_{q_k}^k\}$ schreiben, wobei die Elemente aufsteigend geordnet sind und $a_0^k = -\infty, a_{q_k}^k = +\infty$ gilt.

Betracthe jetzt das endliche System von Intervallen

$$\mathcal{J} = \left\{ J_1 \times \cdots \times J_n \,\middle|\, \text{für jedes } k, J_k = \{a_i^k\} \text{ für } 0 < i < q_k \text{ oder } J_k = (a_i^k, a_{i+1}^k) \text{ für } 0 \le i < q_k \right\}.$$

Es ist klar, dass die Intervalle in $\mathcal{J}$ eine Partition von $\mathbb{R}^n$ sind, und dass jede A_j eine Vereinigung von Intervallen in $\mathcal{J}$ ist. Deshalb kann die Vereinigung $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ als die Vereinigung der Intervalle $J \in \mathcal{J}$, die in einem A_j enthalten sind, geschrieben werden. Insbesondere ist $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ eine Vereinigung endlich vieler Intervalle und $A_1 \cup \cdots \cup A_m \in \mathcal{A}$.

Dieses Argument zeigt auch, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter Komplementen ist: man definiert $\mathcal{J}$ wie oben, aber nur mit der Elementarfigur A, und sieht, dass A die Vereinigung von manchen der Intervalle in $\mathcal{J}$ ist. Deshalb ist A^c die Vereinigung der übrigen Intervalle und $A^c \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 2.2.

Es sei (X, Σ, μ) ein Massraum. Eine Teilmenge $A \in \Sigma$ heisst ein *μ-Atom*, falls es gilt, dass $\mu(A) > 0$ und für alle $B \in \Sigma$ mit $B \subset A$, entweder $\mu(A \ \setminus B) = 0$ oder $\mu(B) = 0$. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Es sei A ein μ-Atom und $B \in \Sigma$, sodass $B \subset A$. Dann gilt entweder $\mu(B) = \mu(A)$ oder $\mu(B) = 0$.

Lösung: Wenn $\mu(B) = 0$, so ist nichts zu beweisen. Folglich sei $\mu(A \setminus B) = 0$. Gemäss Additivität und Monotonie erhalten wir:

$$\mu(B) \le \mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(B),$$

und somit $\mu(A) = \mu(B)$. □

(b) Es sei $A \in \Sigma$ und man nehme an, dass $0 < \mu(A) < \infty$. Zudem gelte für alle $B \in \Sigma$ mit $B \subset A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A) = \mu(B)$. Dann ist A ein μ-Atom.

Lösung: Wenn $\mu(B) = 0$, so ist nichts zu beweisen. Andernfalls gilt $\mu(A) = \mu(B) < \infty$ und wir bemerken, dass dank Additivität gilt:

$$\mu(B) = \mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B).$$

Weil $\mu(B)$ endlich ist, impliziert dies $\mu(A \setminus B) = 0$ und somit, dass A ein μ-Atom ist. □

(c) Es sei μ σ-endlich ist, d.h. es existiert eine abzählbare Familie $\{S_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, sodass $\mu(S_j) < \infty$ für alle j und $X = \bigcup_j S_j$. Zeige, dass für alle μ-Atome A, $\mu(A) < \infty$ gilt.

Lösung: OBdA können wir annehmen, dass die S_j paarweise disjunkt sind (denn wir können $\bigcup_{i=1}^{j-1} S_i$ aus S_j für jedes j entfernen) und wir definieren $A_j = S_j \cap A \in \Sigma$. Da $A_j \subset A$ folgt aus der ersten Teilaufgabe:

$$\mu(A_j) = 0 \quad \text{oder} \quad \mu(A) = \mu(A_j) \le \mu(S_j) < \infty$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$.

Falls der zweite Fall zutrifft, so haben wir das Gewünschte. Es genügt also, den Fall $\mu(A_j) = 0$ für alle j zu betrachten. Wegen der σ-Additivität gilt in diesem Szenario allerdings $\mu(A) = 0$ und somit ist die Aussage bewiesen. □

Aufgabe 2.3.
Es sei X eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{B} := \left\{ E \subset X \;\middle|\; E \text{ oder } E^c \text{ abzählbar } \right\}$$

Zeige, dass $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ mit

$$\mu(E) := \begin{cases} 0 & \text{falls } E \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Prämass auf $\mathcal{B}$ definiert[2].

Lösung: Es ist leicht zu sehen, dass $\mu(\varnothing) = 0$. Man nehme deshalb an, dass $A, \{A_j\}_j$ eine abzählbare Teilfamilie von $\mathcal{B}$ ist, so dass $A = \bigcup_j A_j$ und die A_j paarweise disjunkt sind.

Falls A abzählbar ist, impliziert dies, dass $A_j \subset A$ auch abzählbar ist für jedes $j \in \mathbb{N}$. Folglich:

$$\mu(A) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Andernfalls ist A überabzählbar, was impliziert, dass es ein j_0 gibt, so dass A_{j_0} ebenfalls überabzählbar ist. Zudem gilt aufgrund der Definition von $\mathcal{B}$, dass $A_{j_0}^c$ abzählbar ist. Da A_j in $A_{j_0}^c$ enthalten ist für alle $j \neq j_0$ aufgrund der Disjunktheit, zeigt dies, dass A_j abzählbar ist, falls $j \neq j_0$. Somit erhalten wir:

$$\mu(A) = 1 = \mu(A_{j_0}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Dies zeigt, dass μ ein Prämass ist. □

Aufgabe 2.4.
Es sei X eine Menge und $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Mass auf X. Wir schreiben $\mathcal{A}_\mu$ für die σ-Algebra der μ-messbaren Teilmengen von X. Sei $B \subset X$ eine beliebige Teilmenge.

(a) Sei $\mu \llcorner B$ die Einschränkung von μ auf B und gegeben durch:

$$\forall A \subset X : \quad \mu \llcorner B(A) := \mu(A \cap B).$$

Zeige, dass $\mu \llcorner B$ ein Mass ist.

[2] Siehe Definition 1.2.19 im Vorlesungsskript.

Lösung: Wir definieren $\tilde{\mu} := \mu \llcorner B$. Es ist klar, dass $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$. Ausserdem, sei $A, \{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Teilmengen von X, sodass:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Es ist trivial zu sehen, dass $A \cap B, \{A_j \cap B\}_{j \in \mathbb{N}}$ dieselbe Inklusion erfüllen. Folglich, da μ ein Mass ist:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap B) \\ &\geq \mu(A \cap B) = \tilde{\mu}(A),\end{aligned}$$

was impliziert, dass $\tilde{\mu}$ ein Mass ist. $\square$

(b) Zeige, dass $\mathcal{A}_\mu$ eine Teilmenge der σ-Algebra der $\mu \llcorner B$-messbaren Mengen ist.

Lösung: Es sei $A \in \mathcal{A}_\mu$ sowie $C \subset X$ beliebig und man bemerke, da A μ-messbar ist:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(C \cap A) + \tilde{\mu}(C \setminus A) &= \mu(C \cap B \cap A) + \mu(C \cap B \setminus A) \\ &= \mu(C \cap B) = \tilde{\mu}(C),\end{aligned}$$

was impliziert, dass A auch $\tilde{\mu}$-messbar ist. $\square$

Aufgabe 2.5.

Es seien X, Y Mengen, $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Mass auf X, dessen σ-Algebra der messbaren Mengen $\mathcal{A}_\mu$ ist und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wie kann man auf natürliche Weise ein Bildmass $f_*\mu$ auf Y definieren? Zeige, dass für dieses Mass, das Mengesystem[3]

$$f_*(\mathcal{A}_\mu) := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu\}$$

eine Teilmenge der σ-Algebra der $f_*\mu$-messbaren Mengen von Y ist.

Lösung: Wir definieren, für $B \subseteq Y$, $f_*\mu(B) := \mu(f^{-1}(B))$. Es ist klar, dass $f_*\mu(\varnothing) = \mu(f^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$, und wenn $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ gegeben sind, gilt $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_j f^{-1}(B_j)$, damit

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \leq \sum_j \mu\left(f^{-1}(B_j)\right) = \sum_j f_*\mu(B_j).$$

Dies zeigt, dass $f_*\mu$ tatsächlich ein Mass auf Y ist.

Ausserdem, falls $B \in f_*(\mathcal{A}_\mu)$ und $E \subseteq Y$ beliebig ist, gilt es, dass $f^{-1}(E \cap B) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(E \setminus B) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(B)$, deshalb

$$\begin{aligned}f_*\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) &= \mu(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(B)) + \mu(f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(B)) \\ &= \mu(f^{-1}(E \cap B)) + \mu(f^{-1}(E \setminus B)) \\ &= f_*\mu(E \cap B) + f_*\mu(E \setminus B)\end{aligned}$$

[3] Das ist die σ-Algebra, die in Ausgabe 1.4 aus Serie 1 eingeführt wurde.

da $f^{-1}(B)$ μ-messbar ist. Es folgt, dass B $f_*\mu$-messbar ist. $\square$