Aufgabe 5.1.

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Cantor Menge C überabzählbar ist. Zur Erinnerung: Jedes $x \in [0,1]$ kann zur Basis 3 entwickelt werden, d.h. $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x) \frac{1}{3^i}$ für $d_i(x) \in \{0,1,2\}$. Die Cantor Menge C ist dann durch jene $x \in [0,1]$ definiert, welche keine Koeffizienten 1 zur Basis 3 haben, also:

$$C := \{x \in [0,1] \mid d_i(x) \in \{0,2\}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Die Cantor-Lebesgue Funktion F ist nun wie folgt definiert:

$$F : C \to [0,1], \quad F\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

(a) Zeige dass $F(0) = 0$ und $F(1) = 1$.

Lösung: Wir haben $0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 \cdot \frac{1}{3^i}$ und deshalb $F(0) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = 0$. Für 1 haben wir die Expansion $1 = 0.2222...$, also $1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{3^i}$ und deshalb

$$F(1) = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \qquad \square$$

(b) Zeige dass F wohldefiniert und stetig auf C ist.

Lösung: Im Allgemeinen ist die Entwicklung zur Basis 3 von $x \in [0,1]$ nicht eindeutig, da etwa $0.1 = 0.022222....$ ist. Erlauben wir aber nur Expansionen mit Koeffizienten 0 und 2 so ist die Darstellung eindeutig, weshalb F auf C wohldefiniert ist. (Es kann leicht gezeigt werden, dass F sogar auf $[0,1]$ wohldefiniert wäre, indem man solche periodischen Endungen 222... genauer betrachtet).

Nun zeigen wir, dass F stetig auf C ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Sei $x \in C$ und $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in C, welche gegen x konvergiert. Sei $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Wegen der Konvergenz von $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibt es ausserdem ein $M > N$ sodass $|x_n - x| < \frac{1}{3^M}$, für alle $n > M$. Das heisst nun, dass x und x_n für alle $n > M$ im gleichen Intervall von C_n liegen, wobei

$$C_n = \{x \in [0,1] \mid d_i(x) \in \{0,2\}, \forall i \leq n\},$$

die n-te Näherung an die Cantormenge C ist (siehe Vorlesung). Es folgt also insbesondere, dass $d_i(x) = d_i(x_n)$ für alle $i \leq M$ gelten muss. Daher:

$$|F(x_n) - F(x)| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^M} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon,$$

was die Stetigkeit von F impliziert. $\square$

(c) Zeige dass F surjektiv ist.

Lösung: Sei $y \in [0,1]$ beliebig. Die Expansion von y zur Basis 2 sei gegeben durch $y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{1}{2^k}$ für $b_k \in \{0,1\}$. Sei nun $a_k := 2b_k$ für alle $k \geq 1$. Dann ist $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{3^k}$ per Definition (weil

$a_k \in \{0,2\}$) ein Element in C und es gilt:

$$F(x) = F\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} = y.$$

F ist also surjektiv. □

(d) Schliesse daraus, dass C überabzählbar ist.

Lösung: F ist eine stetige Abbildung, welche C surjektiv auf $[0,1]$ abbildet. Da $[0,1]$ überabzählbar ist, muss also auch C überabzählbar sein. □

Aufgabe 5.2.

Sei E die Menge aller Zahlen in $[0,1]$ welche keine 7 in der Dezimaldarstellung bezüglich der Basis 10 haben.

Bemerke, dass es auch zwei verschiedene Darstellungen geben kann. Wir machen hier die Konvention, nur jene Darstllungen zu betrachten, welche von keiner Nachkommastelle an identisch null sind. Wir schreiben also $\frac{27}{100}$ als $0,269999....$ und nicht $0,27$.

Beweise, dass E Lebesgue-messbar ist und berechne das Lebesgue-Mass.

Lösung: Jedes $x \in [0,1]$ lässt sich in der folgenden Form darstellen:

$$x \;\;=\;\; 0.a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

wobei $a_j \in \{0,1,\ldots,9\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Falls $x \in [0,1] \setminus E$, dann ist wenigstens ein a_j gerade gleich 7. Daher definieren wir:

$$n(x) := \min\big\{j \in \mathbb{N} \big| a_j = 7\big\}.$$

Von nun an lassen wir das x weg und schreiben nur n anstelle von $n(x)$. Bemerke, dass gilt:

$$0.a_1 \ldots a_{n-1}7 < x \leq 0.a_1 \ldots a_{n-1}8,$$

aufgrund unserer Konvention, dass die Dezimaldarstellung nicht trivial wird ab einer bestimmten Stelle. Folglich erhalten wir die Inklusion:

$$[0,1] \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{(0.a_1 \ldots a_{n-1}7, 0.a_1 \ldots a_{n-1}8] \big| a_1, \ldots, a_{n-1} \neq 7\big\}$$

Die umgekehrte Inklusion ist klar wegen der Definition von E und indem man $0.a_1 \ldots a_{n-1}8$ als $0.a_1 \ldots a_{n-1}79 \ldots$ schreibt, wie es unsere Konvention verlangt. Es folgt somit, dass $[0,1] \setminus E$ eine abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle ist, was zeigt, dass E Borel ist.

Schliesslich berechnen wir das Lebesgue Mass von $[0,1] \setminus E$. Dazu bemerken wir:

$$\mathcal{L}^1\big((0.a_1 \ldots a_{n-1}7, 0.a_1 \ldots a_{n-1}8]\big) = \frac{1}{10^n},$$

und zumal wir 9^{n-1} Möglichkeiten haben, die Parameter $a_1, \dots, a_{n-1}$ zu wählen, folgern wir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1\ \big([0,1]\setminus E\big) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a_j\neq 7}\mathcal{L}^1\big((0.a_1\dots a_{n-1}7, 0.a_1\dots a_{n-1}8]\big)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 9^{n-1}\cdot\frac{1}{10^n} = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{9}{10}\big)^k = 1,\end{aligned}$$

was auch zeigt, dass $\mathcal{L}^1(E) = 0$. □

Aufgabe 5.3.

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Konstante L. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq s < +\infty$. Zeige, dass:

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s\mathcal{H}^s(A)$$

Lösung: Sei $\delta > 0$ fixiert. Dann gibt es eine Überdeckung von A der Form:

$$A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(x_k), \qquad r_k < \delta$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit gilt für alle $a \in B_{r_k}(x_k)$ sofort, dass $f(a) \in B_{Lr_k}(f(x_k))$, was wiederum zeigt:

$$f(A) \subset \bigcup f(B_{r_k}(x_k)) \subset \bigcup B_{Lr_k}(f(x_k))$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) &= \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} r_k^s \ \Big|\ A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(x_k), r_k < \delta\Big\}\\ &\geq \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} r_k^s \ \Big|\ f(A) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{Lr_k}(f(x_k)), r_k < \delta\Big\}\\ &= \frac{1}{L^s}\inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} (Lr_k)^s \ \Big|\ f(A) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{Lr_k}(f(x_k)), Lr_k < L\delta\Big\} = \frac{1}{L^s}\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)),\end{aligned}$$

und durch $\delta \to 0$ erhalten wir das gesuchte Ergebnis. □

Aufgabe 5.4.

Sei C die in der Vorlesung definierte Cantor-Menge. Beweise, dass gilt:

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} =: s,$$

und ferner $2^{-s-1} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 2^{-s}$.

Lösung: Bemerke, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = s$ eine direkte Konsequenz der Ungleichungen ist, welche wir beweisen wollen. Folglich reicht es, dass $\mathcal{H}^s$-Mass von C abzuschätzen:

Gemäss Konstruktion wissen wir:

$$C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l=1}^{2^k} I_l^{(k)},$$

wobei $I_l^{(k)}$ abgeschlossene Intervalle der Länge 3^{-k} sind, welche durch wiederholtes entfernen des mittleren Drittels jedes Intervalls entstehen. Wir überdecken C daher mit 2^k Intervallen mit leicht grösserer Länge als $I_l^{(k)}$, genauer mit Radius $\frac{\lambda}{2} \cdot 3^{-k}$ wobei $2 > \lambda > 1$, aber mit dem gleichen Mittelpunkt. Dies ermöglicht es uns, dass Hausdorff-Mass abzuschätzen:

$$\mathcal{H}^s_{2\cdot 3^{-k}}(C) \leq \sum_{l=1}^{2^k} \big(\frac{\lambda}{2} \cdot 3^{-k}\big)^s = 2^k \lambda^s 2^{-s} 3^{-ks} = 2^k \lambda^s 2^{-s} 2^{-k} = 2^{-s}\lambda^s,$$

wobei wir verwendet haben, dass $3^s = 2$. Bemerke, dass wenn man $\lambda \to 1$ gehen lässt, so erhalten wir $\mathcal{H}^s_{2\cdot 3^{-k}}(C) \leq 2^{-s}$. Zumal wir k gegen ∞ gehen lassen können, impliziert dies $\mathcal{H}^s(C) \leq 2^{-s}$.

Nun wollen wir die andere Ungleichung beweisen. Sei $\{B_{r_k}(x_k)\}_{k\,\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von C mit offenen Bällen. Da C kompakt ist, können wir oBdA annehmen, dass es nur endlich viele Bälle $B_1 := B_{r_1}(x_1), \dots, B_N := B_{r_N}(x_N)$ in der Überdeckung von C hat. Für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass:

$$3^{-k-1} \leq 2r_j \leq 3^{-k}.$$

Dies zeigt, dass B_j höchstens ein Intervall der Form $I_l^{(k)}$ für den Index k schneidet. Für alle $m \geq k$ schneidet B_j höchstens 2^{m-k} Intervalle der Form $I_l^{(m)}$ gemäss direkter Überlegungen. Beobachte:

$$2^{m-k} = 2^m \cdot 3^{-sk} = 2^m \cdot 3^s \cdot 3^{-s(k+1)} \leq 2^m \cdot 3^s \cdot (2r_j)^s, \tag{1}$$

aufgrund der Wahl von k und s. Da wir uns nur um endlich viele Bälle kümmern, existiert ein grosses m, sodass $3^{-m-1} \leq 2r_j$ für alle $1 \leq j \leq N$. Summieren wir über j die Ungleichungen (1) und bemerken, dass die Anzahl Intervalle, welche die Bälle schneiden, genau 2^m ist, da jedes Intervall nicht-leeren Schnitt mit wenigstens einem Ball haben muss, so sehen wir:

$$\begin{aligned} 2^m &\leq \sum_{j=1}^N 2^m 3^s (2r_j)^s \\ &= 2^m 3^s 2^s \sum_{j=1}^N r_j^s, \end{aligned}$$

umordenen und kürzen ergibt:

$$2^{-s-1} = 2^{-s}3^{-s} \leq \sum_{j=1}^N r_j^s,$$

was genau die gesuchte Ungleichung ist aufgrund der Tatsache, dass die Überdeckung beliebig war. $\square$