Aufgabe 6.1.
Seien $s \geq 0$ and $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren das Mass

$$\mathcal{H}^s_\infty(A) := \inf \left\{ \sum_{k\in I} r_k^s \mid A \subset \bigcup_{k\in I} B(x_k, r_k),\ r_k > 0 \right\},$$

wobei die Indexmenge I höchstens abzählbar ist. Beweise, dass $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$ auf $\mathbb{R}$ nicht Borelsch ist.

Bemerkung. Die Definition von $\mathcal{H}^s_\infty$ stimmt mit Definition 1.8.1 in dem Skript für $\delta = \infty$.

Lösung: Wir zeigen, dass das Intervall $[0,1]$ nicht $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$-messbar ist. Dies impliziert, dass $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$ nicht Borelsch auf $\mathbb{R}$ ist.

Erst beweisen wir: $\mathcal{H}^{1/2}_\infty([a,b]) = (\frac{b-a}{2})^{1/2}$ für alle $a < b$. Das Intervall $B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} + \varepsilon)$ überdeckt $[a,b]$ für alle $\varepsilon > 0$. Deshalb $\mathcal{H}^{1/2}_\infty([a,b]) \leq \left(\frac{b-a}{2} + \varepsilon\right)^{1/2}$, woraus folgt $\mathcal{H}^{1/2}_\infty([a,b]) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{1/2}$, weil ε beliebig ist. Andererseits, ist die gesamte Längte der Intervalle einer endlichen oder abzählbaren Überdeckung $\{B(x_k, r_k)\}_{k\in I}$ von $[a,b]$ mindestens $b-a$, nämlich $\sum_{k\in I} 2r_k \geq b-a$. Zusammen mit $(\sum_{k\in I} r_k^{1/2})^2 \geq \sum_{k\in I} r_k$ folgt

$$\sum_{k\in I} r_k^{1/2} \geq \left(\sum_{k\in I} r_k\right)^{1/2} \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{1/2}.$$

Daher erhalten wir: $\mathcal{H}^{1/2}_\infty([a,b]) = (\frac{b-a}{2})^{1/2}$ für alle $a < b$. Analog beweist man das gleich Ergebnis für halboffene und offene Intervalle.

Es folgt

$$\mathcal{H}^{1/2}_\infty([0,2]) = 1 \neq 2^{3/2} = \mathcal{H}^{1/2}_\infty([0,1]) + \mathcal{H}^{1/2}_\infty((1,2]).$$

Dies zeigt, dass $[0,1]$ nicht $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$-messbar ist. □

Aufgabe 6.2.
Beweise die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{L}^n$ ist ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$.

Lösung: In der Vorlesung konnten wir bereits zeigen, dass das Lebesgue-Mass $\mathcal{L}^n$ Borel regulär ist. Sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Da K dann auch beschränkt sein muss, zum Beispiel $K \subset B_R(0)$, gilt klarerweise $\mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(B_R(0)) = \omega_n R^n < \infty$. □

(b) $\mathcal{H}^s$ für $s < n$ ist kein Radonmass, für $s \geq n$ aber schon ein Radonmass.

Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\mathcal{H}^s$ für alle $s > 0$ Borel regulär auf $\mathbb{R}^n$ ist. Es genügt also $\mathcal{H}^s(K)$ für kompakte Mengen K zu betrachten. Da $\mathcal{L}^n(A) = C_n \mathcal{H}^n(A)$ mit einer Konstante $C_n < \infty$ für alle messbaren $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt, folgt sofort $\mathcal{H}^n(K) < \infty$ für K kompakt. Mit Hilfe von Serie 4.4 folgt dann direkt (für eine kompakte Menge K mit positivem Mass) $\mathcal{H}^s(K) = 0$ für für $s > n$ sowie $\mathcal{H}^s(K) = \infty$ für $s < n$. □

(c) Falls μ ein Radonmass ist, $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar, so ist auch $\mu \llcorner A$ mit

$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B), B \subset \mathbb{R}^n$$

ein Radonmass.

Lösung: Es ist leicht einzusehen, dass $\nu := \mu \llcorner A$ wieder ein Mass ist. Für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt daher

$$\nu(K) = \mu(A \cap K) \leq \mu(K) \leq \infty$$

da μ nach Voraussetzung ein Radonmass ist.

Als nächstes bemerken wir, dass gemäss Serie 2.3 ν sicherlich ein Borel-Mass ist.

Es bleibt zu zeigen, dass ν Borel regulär ist. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ und sei o.B.d.A. $\mu(B) < \infty$ (Betrachte ansonsten $B \cap Q_l$ für eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{R}^n = \cup Q_l$, sodass $\mu(Q_l) < \infty$). Wähle nun C bzw. D Borelsch mit $A \cap B \subset C$ und $B \backslash A \subset D$ und

$$\mu(A \cap B) = \mu(C), \qquad \mu(B \backslash A) = \mu(D) \leq \mu(B) < \infty$$

Da A μ-messbar, $A \cap B \subset A \cap C$ folgt

$$0 \leq \mu(C \backslash A) = \mu(C) - \mu(C \cap A) = \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) \leq 0$$

Also

$$\nu(C) = \mu(A \cap C) = \mu(A \cap B) = \nu(B)$$

Analog folgt wegen $B \backslash A \subset D \backslash A$ die Beziehung

$$\nu(D) = \mu(D \cap A) = \mu(D) - \mu(D \backslash A) \leq \mu(D) - \mu(B \backslash A) = 0.$$

Schliesslich ist $C \cup D =: E$ Borelsch mit $B \subset E$ und

$$\nu(B) \leq \nu(E) \leq \nu(C) + \nu(D) = \nu(B),$$

wie gewünscht. $\square$

Aufgabe 6.3.

Zeige, dass $\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{t \geq 0 \mid \mathcal{H}^t(A) = +\infty\}$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$.

Lösung: Verwende Lemma 1.8.5 in dem Skript, erhalten wir, dass $d \geq 0$ existiert, so dass $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ für alle $s \in [0, d)$ und $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für alle $s \in (d, \infty)$. Aus Definition 1.8.8 von Hausdorff-Dimension, haben wir $\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\} = d$. Andererseits gilt es eindeutlig $\sup\{t \geq 0 \mid \mathcal{H}^t(A) = +\infty\} = d$. Das Ergebnis folgt. $\square$

Aufgabe 6.4.

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige injektive Kurve. Wir definieren die Bogenlänge von γ als

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid N \in \mathbb{N},\ a \leq t_0 \leq \ldots \leq t_N \leq b \right\}.$$

Zeige: $\mathcal{H}^1(\operatorname{Im}(\gamma)) = \frac{1}{2} L(\gamma)$.

Lösung: Wir beweisen zuerst, dass $\mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\gamma)) \leq \frac{1}{2}L(\gamma)$. Falls $L(\gamma) = \infty$, so ist nichts zu zeigen, andernfalls sei $n \in \mathbb{N}$ und man nehme eine Folge $t_0, t_1, \dots t_{2^{n+1}}$ in $[a, b]$, sodass:

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{2^{n+1}} = b.$$

Indem man die Folge geschickt wählt, kann man annehmen:

$$L(\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}) = \frac{1}{2}L(\gamma) \cdot 2^{-n}, \quad \forall k \in \{0, \ldots 2^{n+1} - 1\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und man definiere $\delta_n := \frac{1}{2}(L(\gamma) + 2\varepsilon) \cdot 2^{-n}$. Es ist klar, dass:

$$\gamma([t_{2k}, t_{2k+1}]) \cup \gamma([t_{2k+1}, t_{2k+2}]) \subset B_{\delta_n}(\gamma(t_{2k+1})),$$

was impliziert, dass wenn man alles Bälle mit Radius δ_n um die Punkte t_{2k+1} nimmt, so erhalten wir eine Überdeckung von γ. Folglich gilt gemäss der Definition des Hausdorff-Masses:

$$\mathcal{H}^1_{2\delta_n}(\mathrm{Im}(\gamma)) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \delta_n = 2^n \delta_n = \frac{1}{2}L(\gamma) + \varepsilon,$$

wobei die Summationsgrenzen wegen der 2^n Bälle zustande kommen, welche für die Überdeckung von γ nötig sind. Dies beweist die Ungleichung, nachdem man ε gegen 0 gehen lässt.

Als nächstes zeigen wir die umgekehrte Ungleichung. Wenn $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Pfad ist, so definieren wir:

$$\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\phi)) := \sup\{d(\phi(x), \phi(y)) \mid x, y \in [a, b]\}.$$

Wir wollen die folgende Ungleichung beweisen:

$$2 \cdot \mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\phi)) \geq \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\phi)) \tag{1}$$

Bevor wir diese aber beweisen wollen wir sie anwenden: Sei $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots t_N = b$ eine Folge von Punkten in $[a, b]$ und definiere $U_j := \mathrm{Im}(\gamma|_{[t_{j-1},t_j]})$ für alle $j = 1, \ldots, N$. Bemerke, dass alle U_j paarweise disjunkt sind bis auf einzelne Punkte, welche $\mathcal{H}^1$-Mass 0 haben. Daher können wir schliessen:

$$\mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\gamma)) = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{H}^1(U_j).$$

Die gesuchte Ungleichung folgt nun:

$$d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \mathrm{diam}(\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}) = \mathrm{diam}(U_j) \leq 2 \cdot \mathcal{H}^1(U_j),$$

indem man über j summiert, wird klar:

$$L(\gamma) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{N} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \sum_{j=1}^{N} 2 \cdot \mathcal{H}^1(U_j) = 2 \cdot \mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\gamma)),$$

durch eine geeignete Wahl der t_j. Lässt man ε gegen 0 gehen, so folgt erhalten wir genau die gewünschte Ungleichung und dadurch das gesuchte Resultat.

Es bleibt (1) zu beweisen. Sei $B_1, \ldots, B_N$ eine Überdeckung des Bildes von ϕ mittels Bällen mit Radii $r_1, \ldots, r_N$. Seien $x, y \in \mathrm{Im}(\phi)$. Wegen der Stetigkeit von ϕ ist das Bild zusammenhängend und daher existiert eine endliche Teilfamilie von Bällen $B_{j_1}, \ldots, B_{j_k}$, sodass $x \in B_{j_1}, y \in B_{j_k}$ and $B_{j_l} \cap B_{j_{l+1}} \neq \emptyset$ für alle l. Folglich existieren Punkte $z_1, \ldots, z_{k-1}$, sodass $z_l \in B_{j_l} \cap B_{j_{l+1}}$ (Einfachheitshalber seine x, y auch z_0, z_k) und wir folgern:

$$d(x,y) \leq \sum_{l=0}^{k-1} d(z_l, z_{l+1}) \leq \sum_{l=0}^{k-1} \mathrm{diam}(B_{j_{l+1}}) = \sum_{l=0}^{k-1} 2r_{j_{l+1}} \leq 2 \cdot \sum_{j=1}^{N} r_j.$$

Durch geeignete Wahl von $x, y \in \mathrm{Im}(\phi)$ mit Abstand gerade gleich dem Durchmesser des Pfades und mittels geeigneter Wahl der Überdeckung, folgt aus der Definition von $\mathcal{H}^1$:

$$\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\phi)) \leq 2 \cdot \mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\phi)). \qquad \square$$

Aufgabe 6.5.
Betrachte die stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(a) Zeige, dass die Bogenlänge des Graphen von f unendlich ist. Leite daraus ab, dass das $\mathcal{H}^1$-Mass der Menge

$$A := \{(x, f(x)) \mid x \in [0,1]\}$$

unendlich ist.

Hinweis: Benutze Aufgabe 6.4 um die Bogenlänge einer Kurve mit ihrem $\mathcal{H}^1$ Mass zu verbinden.

Lösung: Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, f(x))$ die stetige Kurve, welche A parametrisiert. Betrachte die Folge $x_k = \frac{2}{(2k+1)\pi} \in [0,1]$, damit gilt $\sin \frac{1}{x_k} = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^k$. Schätze dann den Abstand zwischen zwei konsekutiven Punkten in der Kurve wie folgt ab:

$$\begin{aligned} d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k+1})) &= d\left(\left(x_k, x_k \sin \frac{1}{x_k}\right), \left(x_{k+1}, x_{k+1} \sin \frac{1}{x_{k+1}}\right)\right) \\ &\geq \left| x_k \sin \frac{1}{x_k} - x_{k+1} \sin \frac{1}{x_{k+1}} \right| = \left| x_k (-1)^k - x_{k+1} \sin (-1)^{k+1} \right| \\ &= \left| (-1)^k (x_k + x_{k+1}) \right| = x_k + x_{k+1} > x_k. \end{aligned}$$

Dann kann man für ein beliebiges $N > 0$ die Parameter $0 < x_N < x_{N-1} < \cdots < x_1 < 1$ benutzen, um die Länge $L(\gamma)$ abzuschätzen:

$$L(\gamma) \geq \sum_{k=1}^{N-1} d(\gamma(x_k), \gamma(x_{k+1})) \geq \sum_{k=1}^{N-1} x_k = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(2k+1)\pi}.$$

Die Summe verhält sich wie die harmonische Reihe und daher divergiert sie wenn $N \to \infty$. Deshalb ist $L(\gamma) = \infty$ und mithilfe der Aufgabe 6.4 gilt $\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{H}^1(\mathrm{Im}(\gamma)) = \frac{1}{2} L(\gamma) = \infty$. $\square$

(b) Zeige, dass $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für alle $s > 1$ gilt.

Lösung: Seien $s > 1$ und $\varepsilon > 0$. Die Funktion $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist glatt auf $[\varepsilon, 1]$ und daher L_ε-Lipschitz für eine Konstante L_ε. Deshalb folgt es aus Aufgabe 5.3, dass

$$\mathcal{H}^s(\gamma([\varepsilon,1])) \leq L_\varepsilon^s \mathcal{H}^s([\varepsilon,1]).$$

Aber es gilt $\dim_{\mathcal{H}}([\varepsilon,1]) = 1$ (weil $\mathcal{H}^1([\varepsilon,1]) \in (0,\infty)$ — man kann Aufgabe 6.4 nochmals anwenden). Dies impliziert, dass $\mathcal{H}^s([\varepsilon,1]) = 0$ für $s > 1$ ist und daher gilt $\mathcal{H}^s(\gamma([\varepsilon,1])) = 0$.
Schliesslich erhalten wir $\mathcal{H}^s(A) = 0$, indem wir $A = \gamma([0,1]) = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{k=1}^\infty \gamma\left(\left[\frac{1}{k}, 1\right]\right)$ schreiben und die Subadditivität von $\mathcal{H}^s$ benutzen.

Bemerkung. Eine explizitere Lösung kann gefunden werden, indem wir A mit kleinen Kugeln überdecken und direkt die Definition vom Hausdorff-Mass benutzen.

(c) Schlussfolgere daraus, dass $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 1$ gilt.

Lösung: Zuerst folgt aus $\mathcal{H}^1(A) = \infty$, dass $\dim_{\mathcal{H}}(A) \geq 1$ gilt. Andererseits erhalten wir aus der Tatsache, dass $\mathcal{H}^s(A)$ für $s > 1$ null ist, die Ungleichung $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq s$ für alle $s > 1$. Daher muss $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 1$ gelten.