Aufgabe 7.1.
Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(i) $f^{-1}(U)$ ist μ-messbar für jedes offene $U \subset \mathbb{R}$

(ii) $f^{-1}(B)$ ist μ-messbar für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$.

(iii) $f^{-1}((-\infty, a))$ ist μ-messbar für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Lösung: (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Da alle offenen Mengen U Borelmengen sind, ist (ii) $\Rightarrow$ (i) klar. Andererseits ist die Menge $\{B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B)\ \mu\text{-messbar}\}$ eine σ-Algebra, siehe Aufgabe 1.4 (b). Diese σ-Algebra enthält nach Voraussetzung alle offenen Mengen und damit auch jede Borelmenge.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Wieder ist klar, dass (ii) $\Rightarrow$ (iii), da $(-\infty, a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ Borelmengen sind. Andererseits aber wissen wir, dass $((-\infty, a))_{a\in\mathbb{R}}$ die Borel-Algebra erzeugt. $\square$

Aufgabe 7.2.
Sei (X, μ, Σ) ein Massraum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen auf X. Zeige: Die Mengen $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ und $\{x \mid f(x) < g(x)\}$ sind messbar.

Lösung: Seien f und g messbar. Dann ist auch $h := f - g$ messbar. Dann ist

$$\{x \mid f(x) = g(x)\} = h^{-1}(\{0\})$$

messbar, sowie auch

$$\{x \mid f(x) < g(x)\} = h^{-1}((-\infty, 0)).$$ $\square$

Aufgabe 7.3.
Eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst Borel-messbar, falls $g^{-1}(U)$ eine Borelmenge ist für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$. Sei nun (X, μ, Σ) ein Massraum, und seien $f\colon X \to \mathbb{R}, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei f μ-messbar und g Borel-messbar ist. Zeige, dass $g \circ f$ μ-messbar ist.

Lösung: Sei $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge. Da g Borel-messbar ist, ist $g^{-1}(U)$ eine Borelmenge. Es ist $f^{-1}(B)$ μ-messbar für alle Borelmengen $B \subset \mathbb{R}$ gemäss Annahme, insbesondere also $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. $\square$

Aufgabe 7.4.
In dieser Aufgabe konstruieren wir eine Lebesgue-messbare Menge, welche nicht Borelsch ist. Diese Menge wird dann verwendet um ein Gegenbeispiel einer stetigen Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einer Lebesgue-messbaren Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu geben, sodass $F \circ G$ nicht Lebesgue-messbar ist.

(a) Sei $h : [0, 1] \to [0, 1]$ die Cantor-Funktion, die die eindeutige monotone Erweiterung von der Funktion $C \to [0, 1]$, die in Aufgabe 5.1 definiert wird, ist. Hier ist $C \subset [0, 1]$ die Cantor-Menge. Definiere $g : [0, 1] \to [0, 2]$ wie folgt $g(x) := h(x) + x$. Beweise, dass g streng monoton und ein Homöomorphismus ist.

Lösung: Strenge Monotonie ist eine direkte Konsequenz der Tatsache, dass h monoton wachsend und $x \mapsto x$ streng wachsend ist. Daher müssen wir nur noch zeigen, dass g^{-1} stetig ist. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist das Bild jeder abgeschlossener Teilmenge von $[0,1]$ unter g kompakt in $[0,2]$ und somit abgeschlossen. Dank Bijektivität impliziert dies bereits, dass g ein Homöomorphismus ist. $\square$

(b) Zeige, dass $\mathcal{L}^1(g(C)) = 1$.

Hint: Benutze die natürliche Zerlegung von $[0,1] \setminus C$ in Intervalle im Beweis.

Lösung: Wir bemerken:

$$[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k},$$

wobei $I_{n,k}$ das k-te entfernte Interval im n-ten Schritt der Konstruktion von C ist und hat Länge $\frac{1}{3^n}$. Zudem gilt:

$$\mathcal{L}^1([0,2] \setminus g(C)) = \mathcal{L}^1(g([0,1] \setminus C)) = \mathcal{L}^1\Big(g\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}\big)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mathcal{L}^1(g(I_{n,k})).$$

Um den Beweis zu beenden, bemerken wir, dass h konstant auf jedem der Intervalle $I_{n,k}$ ist. Daher folgern wir sofort $\mathcal{L}^1(g(I_{n,k})) = \mathcal{L}^1(I_{n,k}) = \frac{1}{3^n}$. Fügt man das in die obige Gleichung ein, so sieht man:

$$\mathcal{L}^1([0,2] \setminus g(C)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1,$$

was wiederum impliziert, dass:

$$1 + \mathcal{L}^1(g(C)) = \mathcal{L}^1([0,2] \setminus g(C)) + \mathcal{L}^1(g(C)) = \mathcal{L}^1([0,2]) = 2,$$

und somit das gewünschte Resultat ergibt. $\square$

(c) Benutze Aufgabe 4.4 (a) um eine nicht-Lebesgue messbare Teilmenge $E \subset g(C)$ zu finden. Definiere dann $A := g^{-1}(E)$. Zeige, dass A eine Lebesgue-Nullmenge ist und daher Lebesgue-messbar.

Lösung: Beobachte, dass $A = g^{-1}(E) \subset g^{-1}(g(C)) = C$. Da C eine Lebsegue-Nullmenge ist, so ist auch A eine Nullmenge und folglich ist AS Lebesgue-messbar. $\square$

(d) Beweise, dass A keine Borel-Menge ist.

Hint: Andernfalls wäre das Urbild von A unter stetigen Abbildungen zwangsläufig eine Borel-Menge und somit Lebesgue-messbar.

Lösung: Nimm an, A wäre Borel. Dann, aufgrund der Stetigkeit von g^{-1}, wissen wir:

$$(g^{-1})^{-1}(A) = g(A) = g(g^{-1}(E)) = E \text{ is a Borel set.} \tag{1}$$

Allerdings ist E nicht Lebesgue-messbar und somit auch nicht Borel, was obiger Aussage widerspricht. Folglich ist A keine Borel-Menge. $\square$

(e) Finde geeignete Funktionen F, G wie oben unter Verwendung der Mengen und Funktionen in den vorherigen Teilaufgaben, sodass $F \circ G$ nicht Lebesgue-messbar ist.

Lösung: Wirwählen $F = \chi_A$ und $G = g^{-1}$, wobei g und A wie zuvor eingeführt sind. Man nehme an, dass $F \circ G$ Lebesgue-messbar wäre. Bemerke, dass $\{1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge ist und somit $(F \circ G)^{-1}(\{1\})$ Lebesgue-messbar gemäss Annahme sein muss. Beobachte:

$$(F \circ G)^{-1}(\{1\}) = G^{-1}\big(F^{-1}(\{1\})\big) = G^{-1}(A) = g(A) = E,$$

aber, gemäss der Konstruktion von E, ist E nicht Lebesgue-messbar. Das ist der gesuchte Widerspruch. $\square$

Aufgabe 7.5.
Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ μ-fast überall stetig (d.h. die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist eine μ-Nullmenge). Zeige, dass f μ-messbar ist.

Lösung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μ-fast überall stetig. Die Menge N der Unstetigkeitsstellen von f hat also Mass $\mu(N) = 0$. Daher ist N messbar.

Die Einschränkung $g := f|_{[a,b]\setminus N}$ ist stetig. Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist $g^{-1}(\Omega)$ offen in $[a,b] \setminus N$, d.h. es existiert $U \subset \mathbb{R}$ offen mit

$$g^{-1}(\Omega) = U \cap ([a,b] \setminus N)\ .$$

Da μ ein Borelmass ist, sind U und $[a,b]$ μ-messbar und damit auch $g^{-1}(\Omega)$. Damit ist

$$f^{-1}(\Omega) = g^{-1}(\Omega) \cup (f^{-1}(\Omega) \cap N)$$

als Vereinigung einer messbaren Menge und einer Nullmenge messbar. Also ist f μ-messbar. $\square$

Aufgabe 7.6.
Sei μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ μ-messbar ist.

Lösung: Da $f^{-1}((-\infty, c))$ entweder ein Intervall in $[a,b]$ oder die leere Menge ist (wenn $c \notin f([a,b])$), ist nach Aufgabe 7.1 f messbar. $\square$