Aufgabe 8.1.
Beweise das erste Prinzip von Littlewood: Sei μ ein Radon-Mass auf $\mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(E) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Elementarfigur F mit $\mu(E \triangle F) < \varepsilon$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Da E μ-messbar ist und μ ein Radon-Mass ist, existiert eine offene Menge $U \supseteq E$, sodass $\mu(U \setminus E) < \varepsilon/2$ gilt. Mithilfe der üblichen Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in dyadische Würfel kann man U als eine Vereinigung von abzählbar vielen offenen Würfeln $Q_1, Q_2, \ldots$ schreiben. Da sie μ-messbar sind gilt

$$\mu(U) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i).$$

Bemerke, dass auch U endliches Mass hat, da $\mu(E) < \infty$. Daher konvergiert die Summe und existiert ein genug grosses k, sodass

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \mu(Q_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Definiere $F := Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ und beobachte:

$$\mu(E \setminus F) \leq \mu(U \setminus F) < \mu\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} Q_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits haben wir

$$\mu(F \setminus E) \leq \mu(U \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und insgesamt folgt $\mu(E \triangle F) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus E) < \varepsilon$. □

Aufgabe 8.2.
Es seien $f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbare Funktionen ($k \in \mathbb{N}$). Es gelte:

$$\mathcal{L}^n(\{x \mid |f_k(x) - f_{k+1}(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige: Der Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert fast überall.

Lösung: Sei $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \leq 2^{-k}\}$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{L}^n(A_k^c) < 2^{-k}$. Setze $B_l := \cap_{k\geq l} A_k$. Wegen $B_{l+1} \supset B_l$ ist $B_{l+1}^c \subset B_l^c$. Wegen:

$$\mathcal{L}^n(B_l^c) \leq \sum_{k\geq l} \mathcal{L}^n(A_k^c) < \sum_{k\geq l} 2^{-k} = 2^{-l+1}$$

(insb. $\mathcal{L}^n(B_1^c) \leq 1$) folgt

$$\mathcal{L}^n\left(\Big(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} B_l\Big)^c\right) = \mathcal{L}^n\Big(\bigcap_{l\in\mathbb{N}} B_l^c\Big) = \lim_{l\to\infty} \mathcal{L}^n(B_l^c) \leq \lim_{l\to\infty} 2^{-l+1} = 0. \tag{1}$$

Für $x \in B_l$ und $l < m < n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} 2^{-k} \leq 2^{-m+1}.$$

Auf B_l ist also $f_k(x)$ eine Cauchyfolge, der Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert. Wegen (1) gilt dies für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Aufgabe 8.3.

Es sei f eine endliche, μ-messbare Funktion, und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-messbarer Funktionen mit folgender Eigenschaft: Jede Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ enthält eine weitere Teilfolge, die im Mass μ gegen f konvergiert.

(a) Zeige, dass die gesamte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Mass μ gegen f konvergiert.

Lösung: Wir nehmen an, das Gegenteil wäre wahr. Dann gäbe es $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ und eine Teilfolge $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, so dass $\mu(\{x \mid |f(x) - f_{k_j}(x)| > \varepsilon\}) > \delta$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Diese Teilfolge kann aber keine im Mass konvergente Teilfolge besitzen. Also konvergiert $\{f_k\}$ im Mass. $\square$

(b) Zeige, dass die analoge Aussage nicht gilt, wenn man Masskonvergenz durch punktweise Konvergenz μ-fast überall ersetzt.

Lösung: Ein Gegenbeispiel ist die Folge $f_k : [0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f_k = \chi_{[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n})}$ für $2^n \leq k < 2^{n+1}$. Für jedes $x \in [0,1)$ ist $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ divergent.

Behauptung: Jede Teilfolge von $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine $\mathcal{L}^1$-fast überall konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{L}^1(I_n) = 2^{-n}$.
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Teilfolge $\{g_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\operatorname{supp}(g_j^{(n)}) \subset I_n$.
3. $\{g_j^{(n+1)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $\{g_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Für $n = 1$ nehmen wir die Intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1)$. Für jedes g_j ist entweder $\operatorname{supp} g_j \subset [0, \frac{1}{2}]$ oder $\operatorname{supp} g_j \subset [\frac{1}{2}, 1)$. Also enthält eines der beiden Intervalle den Träger von unendlich vielen g_j. Wir nennen dieses Intervall I_1. Jene g_j mit Träger in I_1 bilden die Teilfolge $\{g_j^{(1)}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Sei $\{g_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit oben genannten Eigenschaften. Wir definieren die Intervalle $K_l = [l \cdot 2^{-(n+1)}, (l+1) \cdot 2^{-(n+1)}]$. Für alle $g_j^{(n)}$ mit $j_n \geq 2^{n+1}$ existiert ein l mit $\operatorname{supp}(g_j^{(n)}) \subset K_l$. Ein $K_l =: I_{n+1}$ muss den Träger von unendlich vielen $g_j^{(n)}$ enthalten. Diese $g_j^{(n)}$ bilden die Teilfolge $\{g_j^{(n+1)}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Mit dieser Konstruktion bilden wir die Diagonalfolge $h_n := g_n^{(n)}$. Setze $N := \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Wegen Stetigkeit von oben ist $\mathcal{L}^1(N) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^1(I_n) = 0$.

Sei $x \notin N$. Dann gibt es ein $n = n(x)$, so dass $x \notin I_{n(x)}$. Dann ist $h_m(x) = 0$ für alle $m > n(x)$. h_n konvergiert also punktweise gegen Null $\mathcal{L}^1$-fast überall. $\square$

Aufgabe 8.4.

Gegenbeispiel zu $\varepsilon = 0$ im Satz von Lusin: Finde ein Beispiel einer $\mathcal{L}^1$-messbaren Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass für alle $\mathcal{L}^1$-messbaren Mengen $M \subset [0,1]$ mit $\mathcal{L}^1(M) = 1$ gilt, dass die Einschränkung $f|_M : M \to \mathbb{R}$ unstetig in allen bis auf endlich viele Punkten von M ist.

Hinweis: Man darf die Existenz einer Lebesgue-messbaren Teilmenge $A \subset [0,1]$ verwenden, mit der Eigenschaft, dass für alle nicht-leeren, offenen $U \subset [0,1]$ gilt:

$$\mathcal{L}^1(U \cap A) \cdot \mathcal{L}^1(U \cap A^c) > 0.$$

Eine solche Menge A lässt sich mit Hilfe der Cantor-Menge konstruieren.

Lösung: Sei $f = \chi_A$ mit $A \subset [0,1]$ wie im Hinweis. Sei ferner $M \subset [0,1]$ wie in der Aufgabe. Wir zeigen, dass $f|_M$ in jedem Punkt ausser $\{0,1\}$ unstetig ist: Sei $x \in M \setminus \{0,1\}$ und es seien $a_n \leq x \leq b_n$ Folgen, welche monoton gegen x konvergieren. Man bemerke, dass für alle $I_n := (a_n, b_n)$ gilt:

$$\mathcal{L}^1(I_n \cap A \cap M) \cdot \mathcal{L}^1(I_n \cap A^c \cap M) > 0.$$

Um dies zu beweisen verwende die Eigenschaft von A sowie Caratheodory's Charakterisierung von Messbarkeit und finde so einen Widerspruch. Das impliziert insbesondere, dass $x_n, y_n \in I_n$ existieren mit:

$$x_n \in I_n \cap A \cap M, \quad y_n \in I_n \cap A^c \cap M,$$

daher $f(x_n) = 1, f(y_n) = 0$. Man bemerke, dass $x_n \to x$ und analog $y_n \to x$. Dies ergibt den gewünschten Widerspruch zur Stetigkeit. □

Aufgabe 8.5.

Gegenbeispiel zu $\delta = 0$ im Satz von Egoroff: Finde ein Beispiel einer Folge von $\mathcal{L}^1$-messbaren Funktionen $f_k : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$, die fast überall punktweise gegen eine $\mathcal{L}^1$-messbare (und $\mathcal{L}^1$-fast überall endlich) Funktion f konvergiert, aber für jedes kompakte $F \subset [0,1]$ mit $\mathcal{L}^1(F) = \mathcal{L}^1([0,1])$ ist die Konvergenz auf F nicht gleichmässig.

Lösung: Sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$. Konvergierte $f_k \to f$ gleichmässig auf einer kompakten Menge $F \subset [0,1]$ mit $\mathcal{L}^1(F) = 1$, so wäre f insbesondere stetig als Grenzwert stetiger Funktionen. Daher muss $f \equiv 0$. Also ist $\sup_{x \in F} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in F} |f_k(x)|$. Da F kompakt ist, ist das Supremum ein Maximum und wird an einer Stelle $x_0 \in F$ angenommen. Wäre $x_0 < 1$, so enthielte $[0,1] \setminus F$ ein Intervall und $\mathcal{L}^1(F) = 1$ wäre unmöglich. Also ist $x_0 = 1$. Weiterhin sind alle f_k monoton wachsend, also $\sup_{x \in F} |f_k(x)| = |f_k(x_0)| = 1$, im Widerspruch zur gleichmässigen Konvergenz von f_k. □

Aufgabe 8.6.

Sei μ ein Mass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge und $f : \Omega \to [0,\infty]$ eine μ-messbare Funktion. Betrachte die Mengen $A_j \subseteq \Omega$ aus Satz 2.2.6 im Skript, die so definiert sind, sodass die Folge von Funktionen

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{A_j}$$

punktweise gegen f konvergiert. Falls f beschränkt ist, zeige, dass f_k gleichmässig gegen f konvergiert, d.h.

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_k(x)| \longrightarrow 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Lösung: Nimm an, dass $f(x) \leq M$ für jedes $x \in \Omega$ gilt, und sei $k_0 > 2$ gross genug, sodass:

$$\sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{j} > M.$$

Für $x \in \Omega$ und $k \geq k_0$, sei j die grösste ganze Zahl $j \leq k$ mit $x \notin A_j$. Ein solches j muss existieren, denn sonst hätten wir $f(x) \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} > M$. In diesem fall gilt $f_j(x) = f_{j-1}(x)$ und

$$f(x) < f_{j-1}(x) + \frac{1}{j} = f_j(x) + \frac{1}{j} \tag{2}$$

wegen der Definition von A_j. Allerdings ist x in A_ℓ für alle $j < \ell \leq k$, was impliziert, dass

$$f_j(x) + \sum_{\ell=j+1}^{k} \frac{1}{\ell} \leq f(x). \tag{3}$$

Wir kombinieren (2) und (3) und erhalten:

$$\sum_{\ell=j+1}^{k} \frac{1}{\ell} < \frac{1}{j}.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, dass diese Ungleichung nicht halten kann wenn $k - j \geq 3$ ist, zum Beispiel wegen der folgenden einfachen Ungleichung für $j \geq 1$:

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{2j} + \frac{1}{3j} + \frac{1}{6j} < \frac{1}{j+1} + \frac{1}{j+2} + \frac{1}{j+3}$$

Daher gilt $j \geq k - 2$. Dann folgt aus (2) und der Monotonie von $f_k(x)$:

$$0 \leq f(x) - f_k(x) \leq f(x) - f_j(x) < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{k-2},$$

was die gleichmässige Konvergenz beweist. $\square$