Aufgabe 9.1.
In dieser Aufgabe beweisen wir die Linearität, Monotonie und Wohldefiniertheit des Integrals für simple Funktionen wie in Skript, Def. 3.1.2 und Def. 3.1.3. Diese Aussagen sind wichtig, um die entsprechenden Eigenschaften des allgemeinen Integrals zu beweisen.

Bemerkung. In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass alle gegebenen simplen Funktionen wenigstens μ-integrierbar sind.

(a) Seien f, g zwei μ-messbare simple Funktionen mit Werten $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, siehe Def. 3.1.1 im Skript. Zeige, dass μ-messbare, disjunkte Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, sodass:

$$f = \sum_n a_n \chi_{A_n}, \quad g = \sum_n b_n \chi_{B_n},$$

und zeige, dass man die Menge und Werte so wählen kann, dass $A_n = B_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Zu f definieren wir $A_n := f^{-1}(\{a_n\})$ welches eine μ-messbare Teilmenge ist. Es ist dann offensichtlich aufgrund der Tatsache, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Menge aller Werte von f ist:

$$f = \sum_n a_n \chi_{A_n}.$$

Ähnliches gilt für g mit $B_n := g^{-1}(\{b_n\})$. Schliesslich definieren wir $C_{n,m} := A_n \cap B_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und wir bemerken, dass es abzählbar viele Teilmengen $C_{n,m}$ gibt und alle μ-messbar sind. Definieren wir $c^f_{n,m} := a_n$ sowie $c^g_{n,m} := b_m$, so erhalten wir die gesuchten Zerlegungen von f und g bezüglich der gemeinsamen Partition $C_{n,m}$. □

(b) Zeige, dass wenn $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \chi_{A_n}$, wobei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge von Werten (nicht notwendigerweise verschieden) und $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter, μ-messbarer Teilmengen, dann:

$$\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n).$$

Lösung: Es sei $c_1, c_2, \ldots$ die Folge der Werte von f. Beobachte, dass aufgrund der Disjunktheit der A_n:

$$f^{-1}(\{c_n\}) := \bigcup_{m: a_m = c_n} A_n.$$

Somit, gemäss Def. 3.1.2/3.1.3, wissen wir:

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \sum_n c_n \mu\big(f^{-1}(\{c_n\})\big) = \sum_n c_n \mu\Big(\bigcup_{m:a_m=c_n} A_m\Big) = \sum_n c_n \sum_{m:a_m=c_n} \mu(A_m) \\ &= \sum_n \sum_{m:a_m=c_n} a_m \mu(A_m) = \sum_m a_m \mu(A_m),\end{aligned}$$

wobei wir die paarweise Disjunktheit und die Tatsache, dass jede Menge A_m genau einem der Werte c_n zugeordnet wird. □

(c) Seien f, g μ-messbare simple Funktionen, sodass $f \leq g$ μ-fast überall. Dann gilt:

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Lösung: Dank dem ersten Teil der Aufgabe können wir μ-messbare Teilmengen C_n und Folgen a_n, b_n finden, sodass:

$$f = \sum_n a_n \chi_{C_n}, \quad g = \sum_n b_n \chi_{C_n}$$

Wegen $f \leq g$ wissen wir automatisch $a_n \leq b_n$ aufgrund der Disjunktheit der C_n. Dies ist sogar äquivalent zur punktweisen Ungleichung. Allerdings impliziert dies bereits basierend auf der vorherigen Teilaufgabe:

$$\int f d\mu = \sum_n a_n \mu(C_n) \leq \sum_n b_n \mu(C_n) = \int g d\mu,$$

was das gewünschte Resultat ist. □

(d) Seien f, g μ-integrierbare simple Funktionen und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $af + bg$ eine μ-integrierbare simple Funktion ist und:

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

Lösung: Abermals seien a_n, b_n und die Folge der Mengen C_n wie in (a). Bemerke, dass:

$$af + bg = \sum_n (aa_n + bb_n) \chi_{C_n},$$

was sofort zeigt, dass $af + bg$ eine simple Funktion ist dank der Disjunktheit der C_n. Als nächstes verwenden wir (b) um zu sehen:

$$\begin{aligned}\int (af + bg) d\mu &= \sum_n (aa_n + bb_n) \mu(C_n) = a \sum_n a_n \mu(C_n) + b \sum_n b_n \mu(C_n) \\ &= a \int f d\mu + b \int g d\mu,\end{aligned}$$

was genau die gesuchte Gleichung ist. □

(e) Sei f eine μ-integrierbare simple Funktion. Zeige:

$$\underline{\int} f d\mu = \overline{\int} f d\mu = \int f d\mu,$$

wobei das letzte Integral als das Integral für simple Funktionen wie in Def. 3.1.2/3.1.3 zu verstehen ist.

Lösung: Durch Anwenden der Definition und der Tatsache, dass f eine simple Funktion ist, folgern wir:

$$\overline{\int} f d\mu \leq \int f d\mu \leq \underline{\int} f d\mu,$$

dank den entsprechenden Infima und Suprema. Es genügt also zu zeigen:

$$\underline{\int} f d\mu \leq \overline{\int} f d\mu.$$

Hierzu seien g, h simple Funktionen mit $g \leq f \leq h$ und bemerke, dass dank (c):

$$\int g d\mu \leq \int h d\mu.$$

Nimmt man das Supremum über alle g sowie das Infimum über alle h, so erhalten wir die gesuchte Ungleichung. □

Aufgabe 9.2.

(a) Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von μ-messbaren Funktionen auf einer μ-messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ μ-fast überall absolut konvergiert, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |f_k| d\mu < \infty.$$

Lösung: Wir definieren

$$g_k := \sum_{j=1}^{k} |f_j|$$

und klarerweise gilt $g_k \leq g_{k+1}$ für alle $k \geq 1$. Mit dem Theorem der monotonen Konvergenz gilt dann

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \, d\mu &= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \sum_{j=1}^{k} |f_j| \, d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega |f_j| \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega |f_j| \, d\mu.\end{aligned}$$

Da $\int_\Omega \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \, d\mu < \infty$ gilt $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| < \infty$ fast überall. □

(b) Sei $\{r_k\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$; $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, für die $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist. Zeige, dass dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k |x - r_k|^{-1/2}$ absolut konvergent ist für (Lebesgue-)fast alle $x \in [0,1]$.

Lösung: Wir wenden Teil a) auf die Funktionen $f_k(x) = a_k |x - r_k|^{-1/2}$ an. Sie erfüllen

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_k(x)| dx &= |a_k| \int_{r_k}^1 \frac{1}{\sqrt{x - r_k}} dx + \int_0^{r_k} \frac{1}{\sqrt{r_k - x}} dx \\ &= 2|a_k|(\sqrt{1 - r_k} + \sqrt{r_k}) \leq 2\sqrt{2}|a_k|.\end{aligned}$$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1|f_k|dx \leq 2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$ nach Voraussetzung und mit Teil (a) folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 9.3.
Finde ein Beispiel einer stetigen, beschränkten Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit asymptotischem Verhalten $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, für die

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p dx = \infty \ ,$$

für alle $p > 0$.

Lösung: Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\log(2+x)}$$

ist stetig, beschränkt durch $f(x) \leq \log(2)^{-1}$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Aber da $\log(2+x) \leq p(2+x)^{\frac{1}{p}}$, ist

$$\left|\frac{1}{\log(2+x)}\right|^p \geq \frac{1}{p^p(2+x)},$$

was nicht integrierbar ist auf $[0,\infty)$. $\square$

Aufgabe 9.4.
Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-summierbare Funktionen und es gelte:

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu,$$

für alle μ-messbaren $A \subset \Omega$. Zeige, dass $f \leq g$ μ-fast überall. Folgere daraus, dass wenn:

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu,$$

für alle μ-messbaren $A \subset \Omega$, dann gilt $f = g$ μ-fast überall.

Lösung: Definiere $A := \{g < f\}$ sowie $A_n := \{g + \frac{1}{n} \leq f\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bemerke, dass $\bigcup_n A_n = A$ und ferner A_n, A alle messbare Teilmengen sind. Daher folgern wir:

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) + \int_{A_n} g d\mu = \int_{A_n} g + \frac{1}{n} d\mu \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_{A_n} g d\mu.$$

Vergleicht man die LHS und RHS, so folgert man sofort $\mu(A_n) = 0$. Schliesslich erhalten wir somit aus der Stetigkeit von Massen: $\mu(A) = 0$. $\square$

Aufgabe 9.5.
Wir schreiben $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ für Lebesgue-messbare Functionen. Gib Beispiele zu den folgenden Aussagen:

(a) $f_n \to 0$ gleichmässig, aber es gilt nicht $\int |f_n| dx \to 0$.

Lösung: $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ ist ein Beispiel. $\square$

(b) $f_n \to 0$ punktweise und im Mass, aber weder $f_n \to 0$ gleichmässig, noch $\int |f_n| dx \to 0$.

Lösung: $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$ ist ein Beispiel. Alle Aussagen sind trivial einzushen bis auf Konvergenz imMass. Bemerke hierfür, dass:

$$\mathcal{L}^1(|f_n - 0| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \to 0. \qquad \square$$

(c) $f_n \to 0$ punktweise, aber nicht im Mass.

Lösung: $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ ist ein Beispiel. Divergenz im Mass ist offensichtlich, da der Grenzwert zwangsläufig mit dem punktweisen Limes übereinstimmen müsste, da geeignete Teilfolgen der Mass-konvergenten Folge punktweise gegen den gleichen Limes konvergiert. Das ist hier aber nicht der Fall. $\square$

Aufgabe 9.6.

Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine μ-messbare Funktion. Beweise die folgende Aussagen:

(a) Wenn $\int_\Omega f d\mu = 0$, dann ist $f = 0$ μ-fast überall.

Lösung: Wegen der Aufgabe 9.4 und der Ungleichung $f \geq 0$, genügt es zu beweisen, dass es für jede μ-messbare Menge $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$0 = \int_A 0 \, d\mu = \int_A f d\mu.$$

Dies folgt aber leicht aus der Monotonie der Integral:

$$0 \leq \int_A f d\mu \leq \int_\Omega f d\mu = 0.$$

$\square$

(b) Wenn $\int_\Omega f d\mu < +\infty$, dann ist $f < +\infty$ μ-fast überall.

Lösung: Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ die μ-messbare Menge $A_n = \{x \in \Omega \mid f(x) > n\}$ und bemerke, dass $A := \{x \in \Omega \mid f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Sei $C := \int_\Omega f d\mu < +\infty$. Die Monotonie der Integral nochmals impliziert:

$$n\mu(A_n) = \int_{A_n} n d\mu \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_\Omega f d\mu = C,$$

sodass $\mu(A_n) \leq C/n < +\infty$. Dann ist es klar, dass $\mu(A) = 0$. $\square$