

Aufgabe 10.1.

Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine μ -summierbare Funktion und $\Omega_1 \subseteq \Omega$ eine μ -messbare Teilmenge. Zeige, dass $f_1 := f|_{\Omega_1}$ und $f\chi_{\Omega_1}$ μ -summierbar auf Ω_1 bzw. Ω sind, und dass die Gleichung

$$\int_{\Omega_1} f_1 d\mu = \int_{\Omega} f \chi_{\Omega_1} d\mu$$

gilt.

Lösung: Wir beweisen zuerst die Aussage für eine einfache Funktion f . In diesem Fall ist f_1 auch einfach und:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f_1 d\mu &= \sum_{a \in \overline{\mathbb{R}}} a \mu(\{x \in \Omega_1 \mid f_1(x) = a\}) \\ &= \sum_{a \in \overline{\mathbb{R}}} a \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) = a\} \cap \Omega_1) \\ &= \sum_{a \in \overline{\mathbb{R}}} a \mu(\{x \in \Omega \mid f(x)\chi_{\Omega_1}(x) = a\}) \\ &= \int_{\Omega} f \chi_{\Omega_1} d\mu. \end{aligned}$$

In der dritten Gleichung haben wir benutzt, dass für $a \neq 0$, genau dann $f(x)\chi_{\Omega_1}(x) = a$ gilt, wenn $f(x) = a$ und $x \in \Omega_1$.

Jetzt zeigen wir, dass f_1 μ -summierbar ist für eine allgemeine f . Da $\int_{\Omega} |f| < \infty$, gibt es eine einfache Funktion $F : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $|f| \leq F$ und $\int_{\Omega} F < \infty$. Dann ist $F_1 \geq f_1$, was $\int_{\Omega_1} f_1 d\mu \leq \int_{\Omega_1} F_1 d\mu = \int_{\Omega} F \chi_{\Omega_1} d\mu \leq \int_{\Omega} F d\mu < \infty$ ergibt.

Es ist auch klar, dass $f\chi_{\Omega_1}$ μ -summierbar ist, weil $\int_{\Omega} |f\chi_{\Omega_1}| d\mu \leq \int_{\Omega} |f| < \infty$. Deshalb sind beide Funktionen integrierbar. Um die Gleichung zwischen den Integralen zu zeigen, seien g und h einfache Funktionen auf Ω_1 bzw. Ω mit $g \leq f_1$ bzw. $h \geq f\chi_{\Omega_1}$ μ -fast überall. Dann ist $h_1 \geq f_1 \geq g$ und $h \geq 0$ fast überall ausserhalb von Ω_1 , also gilt $h \geq h\chi_{\Omega_1}$. Es folgt:

$$\int_{\Omega_1} g d\mu \leq \int_{\Omega_1} h_1 d\mu = \int_{\Omega} h\chi_{\Omega_1} d\mu \leq \int_{\Omega} h d\mu.$$

Nachdem wir das Supremum über g und das Infimum über h nehmen, erhalten wir:

$$\int_{\Omega_1} f_1 d\mu = \int_{\underline{\Omega_1}} f_1 d\mu \leq \int_{\overline{\Omega}} f\chi_{\Omega_1} d\mu = \int_{\Omega} f\chi_{\Omega_1} d\mu.$$

Der Beweis der umgekehrten Gleichung ist ganz analog. □

Aufgabe 10.2.

Zeige, dass wenn $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine μ -addierbare Funktion ist und $\Omega_1 \subseteq \Omega$ eine Teilmenge mit $\mu(\Omega_1) = 0$ ist, dann ist

$$\int_{\Omega_1} f d\mu = 0.$$

Lösung: Die Funktion $f\chi_{\Omega_1}$ ist null μ -fast überall. Deshalb können wir Aufgabe 10.1 anwenden und wir erhalten:

$$\int_{\Omega_1} f d\mu = \int_{\Omega} f\chi_{\Omega_1} d\mu = 0. \quad \square$$

Aufgabe 10.3.

Durch Anwendung des Satzes von Lebesgue mit dem Zählmass auf \mathbb{N} , zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2^{-i}}{n}\right) = 1.$$

Lösung: Sei μ das Zählmass auf \mathbb{N} und definiere $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ als $f_n(i) = n \sin(2^{-i}/n)$. Bemerke, dass $f_n(i) \leq 2^{-i}$ ist und dass die Funktion $i \mapsto 2^{-i}$ μ -summierbar ist. Deshalb können wir den Satz von Lebesgue anwenden und erhalten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2^{-i}}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1. \quad \square$$

Aufgabe 10.4.

Sei λ das Lebesgue Mass auf \mathbb{R} und f eine nicht negative, integrierbare Funktion auf (\mathbb{R}, λ) . Zeige, dass die folgende Gleichung für das Lebesgue Integral gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > s\}) ds.$$

Hinweis: Zeige die Gleichung zuerst für den Fall, wenn f eine einfache Funktion ist. In diesem Fall wird eine Skizze von f und der Funktion $s \mapsto \lambda(\{f > s\})$ weiterhelfen. Interpretiere beide Seiten im Hinblick auf die Definition des Lebesgue Masses.

Lösung: Sei f einfach und schreibe $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i}$, wobei $\{A_i\}$ paarweise disjunkt sind. Beobachte die folgende Gleichung zwischen Mengen:

$$\{f > s\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i} > s \right\} = \bigcup_{i: a_i > s} A_i$$

Da diese Vereinigung disjunkt ist, folgt es für $s \geq 0$:

$$\lambda(\{f > s\}) = \sum_{i: a_i > s} \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \chi_{[0, a_i)}(s).$$

Jetzt wenden wir den Satz von Beppo Levi (oder der monotonen Konvergenz) an, um das Integral und die Summe zu vertauschen:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > s\}) ds &= \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \chi_{[0, a_i)}(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \int_0^{+\infty} \chi_{[0, a_i)}(s) ds = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda(A_i) = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda. \end{aligned}$$

Somit wird die Gleichung für einfache Funktionen beweis.

Jetzt betrachten wir eine beliebige nicht negative Funktion f . Für eine einfache Funktion $g \leq f$ ist die Funktion $s \mapsto \lambda(\{g > s\})$ eine einfache Funktion, welche kleiner gleich der Funktion $s \mapsto \lambda(\{f > s\})$ ist. Analog auch für einfache Funktionen $g \geq f$.

Da f uneigentlich integrierbar ist, gilt

$$\int f = \int \overline{f} = \int \underline{f}$$

und deshalb ist die Funktion $s \mapsto \lambda(\{f > s\})$ ebenfalls uneigentlich integrierbar (indem man simple Funktionen direkt untersucht wie in der Definition), also

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{f > s\}) ds = \int f.$$

Bemerkung: Die Funktion $s \mapsto \lambda(\{f > s\})$ ist monoton fallend in s , weswegen folgende Gleichung trivial ist:

$$s \leq t \Rightarrow \{f > s\} \supset \{f > t\} \Rightarrow \lambda(\{f > s\}) \geq \lambda(\{f > t\}).$$

Also ist $s \mapsto \lambda(\{f > s\})$ Riemann-integrierbar.

Die eben bewiesene Gleichung, wobei die rechte Seite als Riemann-Integral interpretiert wird, könnte also auch als Definition für das Lebesgue Integral verwendet werden.

Aufgabe 10.5.

Sei $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2}.$$

Zeige, dass

(a) $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0, 1]$ für alle $n \geq 1$;

Lösung: Wir wollen zeigen, dass $\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Das ist äquivalent mit

$$nx \leq 1 + n^2x^2 \Leftrightarrow (1 - nx)^2 + nx \geq 0$$

was für $x \in [0, 1]$ erfüllt ist.

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

Lösung: Wir starten mit der folgenden Beobachtung:

$$\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \leq \frac{n\sqrt{x}}{n^2x^2} \leq \frac{1}{nx\sqrt{x}}$$

Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

punktweise auf $(0, 1]$.

Von (a) wissen wir, dass die Folge f_n immer unterhalb der Funktion $g = \frac{1}{\sqrt{x}}$ liegt. Da g eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $[0, 1]$ ist, folgt aufgrund der dominierten Konvergenz die punktweise Konvergenz zu 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

Aufgabe 10.6.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine μ -messbare Menge mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und sei $\{f_j\}$ eine Folge μ -summierbarer Funktionen $f_j : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die gleichmässig gegen f konvergiert. Beweise, dass f μ -summierbar ist und dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

gilt.

Lösung: Bemerke zuerst, dass f μ -messbar ist, denn wir können den Limes als $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$ schreiben. Die gleichmässige Konvergenz impliziert, dass ein j_0 existiert, sodass $|f(x) - f_j(x)| \leq 1$ für alle $x \in \Omega$ und $j \geq j_0$. Deshalb gilt

$$\int_{\Omega} |f| d\mu \leq \int_{\Omega} |f_j| + 1 d\mu \leq \int_{\Omega} |f_j| d\mu + \mu(\Omega) < \infty,$$

was zeigt, dass f auch μ -summierbar ist. Ausserdem haben wir $|f_j(x)| \leq |f(x)| + 1 =: g(x)$ für $j \geq j_0$, und ein ähnliches Argument wie oben zeigt, dass g μ -summierbar ist. Dann kann man mithilfe des Satzes von Lebesgue den Beweis beenden. \square