Aufgabe 11.1.
Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx$$

für $a\in\mathbb{R}$.

Hinweis: $\arctan x$ ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$.

Lösung: Als Erstes bemerken wir, dass $\frac{n}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{nx^2}\le\frac{1}{x^2}$ für $x>0$ gilt. Wenn $a>0$ ist, kann man den Satz der dominierten Konvergenz von Lebesgue anwenden, da die Funktion $\frac{1}{x^2}$ auf $(a,+\infty)$ summierbar ist:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx=\int_a^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx=\int_a^{+\infty}0\,dx=0.$$

Für $a=0$ benutzen wir die Substitution $y=nx$ und sehen, dass der Wert vom Integral von n unabhängig ist:

$$\int_0^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy=\arctan y\Big|_0^{+\infty}=\arctan(+\infty)-\arctan(0)=\frac{\pi}{2}.$$

Schliesslich benutzen wir für den Fall $a<0$ die Tatsache, dass der Integrand gerade ist:

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx-\int_{-\infty}^{a}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx-\int_{-a}^{+\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Wir schliessen aus den vorherigen Fällen, dass der Grenzwert π ist. □

Aufgabe 11.2.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge und $f\colon\Omega\to[0,+\infty]$ eine μ-summierbare Funktion. Für alle μ-messbare Teilmenge $A\subset\Omega$, definieren wir (siehe Sektion 3.5 in dem Skript)

$$\nu(A)=\int_A f\,d\mu.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) ν ist ein Prämass auf der σ-Algebra der μ-messbaren Mengen, daher definieren wir seine Carathéodory-Hahn Erweiterung $\nu\colon\mathcal{P}(\Omega)\to[0,+\infty]$.

Lösung: Es ist klar, dass $\nu(\emptyset)$ null ist. Sei nun $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie von paarweise disjunkten μ-messbaren Mengen mit $A=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$. Definiere $f_k=f(\chi_{A_0}+\chi_{A_1}+\ldots+\chi_{A_k})$. Bemerke, dass $f_k\le f_{k+1}$ ist und $f_k\xrightarrow{k\to\infty}f\chi_A$ punktweise konvergiert. Der Satz von Beppo Levi impliziert:

$$\begin{aligned}\nu(A)=\int_A f\,d\mu=\int_\Omega f\chi_A d\mu&=\int_\Omega\lim_{k\to\infty}f_k\;d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k d\mu\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\int_\Omega f\chi_{A_i}d\mu=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\int_{A_i}f\,d\mu=\sum_{k\in\mathbb{N}}\nu(A_k).\end{aligned}$$

Hier haben wir Sätze 3.1.15 und 3.1.17 aus dem Skript angewendet. Deshalb ist ν ein Prämass und es kann daher zu einem Mass $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ erweitert werden. Ausserdem ist die σ-Algebra Σ_μ von μ-messbaren Mengen in der σ-Algebra Σ_ν von ν-messbaren Mengen enthalten. $\square$

(b) ν ist ein Radonmass.

Lösung: Beachte zuerst, dass ν ein Borelmass ist, da μ Borelsch ist und $\Sigma_\nu \supseteq \Sigma_\mu$ gilt.

Dann zeigen wir, dass ν Borel regulär ist: Wir beginnen mit einer μ-messbaren Menge $A \subseteq \Omega$. Da μ Borel regulär ist, existiert eine Borelmenge $B \supseteq A$ mit $\mu(A) = \mu(B)$. Des weiteren können wir annehmen, dass $\mu(B \setminus A) = 0$ ist. (Bspw. können wir zunächst $B_i \supseteq A \cap Q_i$ definieren, wobei $\{Q_i\}$ die standard Partition von $\mathbb{R}^n$ in Einheitswürfel bezeichnet. Dann setzen wir $B = \bigcup_i B_i$.) Daher gilt

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_B f d\mu - \int_{B \setminus A} f d\mu = \int_B f d\mu = \nu(B)$$

(siehe Korollar 3.1.18). Sei nun $A \subseteq \Omega$ beliebig. Dann gibt es μ-messbare Mengen $A_k \supseteq A$ mit $\nu(A) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k)$ aufgrund der Definition der Carathéodory–Hahn Erweiterung. Das Obige impliziert, dass wir Borelmengen $B_k \supseteq A_k$ mit $\nu(B_k) = \nu(A_k)$ finden können. Dann gilt $\nu(B) = \nu(A)$ für die Borelmenge $B = \bigcap_k B_k$, somit ist ν Borel regulär.

Zum schluss sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann gilt

$$\nu(K) = \int_K f d\mu < +\infty,$$

weil f μ-summierbar ist. Somit ist ν ein Radonmass. $\square$

(c) ν ist bezüglich μ absolut stetig.

Lösung: Wir haben bereits gesehen, dass $\Sigma_\mu \subseteq \Sigma_\nu$. Wenn $\mu(A) = 0$ für $A \subset \Omega$ gilt, dann ist $\nu(A) = 0$ wegen Korollar 3.1.18. Dies beweist die absolute Stetigkeit von ν bezüglich μ. $\square$

Aufgabe 11.3.

(a) Sei $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte und lokal uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f genau dann $\mathcal{L}^1$-summierbar, wenn f abslout Riemann-integrierbar nach der generalisierte Bedeutung ist (d.h., $\mathcal{R}\int_a^\infty |f(x)|dx = \lim_{j\to\infty} \mathcal{R}\int_a^j |f(x)|dx$ existiert und ist endlich). In diesem Fall haben wir

$$\int_{[a,+\infty)} f(x) d\mathcal{L}^1 = \mathcal{R}\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{R}\int_a^j f(x)dx.$$

Lösung: Siehe den Beweis der Übung 3.6.7 (2) im Skript. $\square$

(b) Sei $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, die lokal beschränkt und lokal uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Zeige, dass f Riemann-integrierbar und nicht absolut Riemann-integrierbar ist, d.h., $\mathcal{R}\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$ aber $\mathcal{R}\int_0^\infty |f(x)|dx = \infty$. Daher ist f nicht $\mathcal{L}^1$-summierbar.

Lösung: Im Folgenden bezeichnen wir mit $\int$ statt $\mathcal{R}\int$ das riemannsche Integral. Wir haben:

$$\int_0^j \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^j \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^j - \int_1^j \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Bemerke, dass $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < +\infty$, $\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^j = \cos 1 - \cos j/j$ und

$$\left|\int_1^j \frac{\cos x}{x^2} dx\right| \leq \int_1^j \frac{|\cos x|}{x^2} dx \leq \int_1^j \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{j}.$$

Daher existiert der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} \int_0^j \frac{\sin x}{x} dx$ und ist endlich. Andererseits haben wir:

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = +\infty.$$ □

Aufgabe 11.4.
Finde eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

- f_n ist uneigentlich Riemann-integrierbar und $f_n \leq f_{n+1}$;
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion f, die NICHT uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Prüfe, dass Beppo Levi Satz für diese Folge hält.

Lösung: Sei $\{r_n\}_{r\in\mathbb{N}}$ eine Nummerierung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ und definiere

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{r_0, r_1, ..., r_n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beobachte, dass $f_n \leq f_{n+1}$ ist und jedes f_n Riemann-integrierbar ist, da es endlich viele Unstetigkeitsstelle hat. Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise (überall auf $[0,1]$) gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

welche nicht Riemann-integrierbar ist.

Beachte, dass f in der Tat Lebesgue-summierbar ist und $\int_{[0,1]} f = 0 = \lim_{[0,1]} f_n$ ist. Dies folgt aber auch aus dem Satz von Beppo Levi. □

Aufgabe 11.5.

(a) Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Betrachte eine Funktion $f\colon \Omega \times (a,b) \to \mathbb{R}$, für ein Interval $(a,b) \subset \mathbb{R}$, so dass:

- die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ ist μ-summierbar für alle $y \in (a,b)$;
- die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ ist in (a,b) differenzierbar, für alle $x \in \Omega$;
- es gibt eine μ-summierbare Funktion $g\colon \Omega \to [0,\infty]$, so dass $\sup_{a<y<b} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Dann ist $y \mapsto \int_\Omega f(x,y)d\mu(x)$ in (a,b) differenzierbar mit

$$\frac{d}{dy}\left(\int_\Omega f(x,y)d\mu(x)\right) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)d\mu(x)$$

für alle $y \in (a,b)$.

Lösung: Fixiere $y \in (a,b)$, sei $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen 0 konvergierende Folge von reellen Zahlen und betrachte die μ-summierbare Funktionen

$$g_k(x) = \frac{f(x,y+h_k) - f(x,y)}{h_k}$$

für k gross genug, sodass $y + h_k$ in (a,b) liegt. Bemerke, dass $g_k(x) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ für $k \to \infty$. Aus dem Mittelwertsatz folgt ausserdem die Abschätzung:

$$|g_k(x)| \leq \sup_{a<y'<b}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y')\right| \leq g(x).$$

Wir haben auch, dass $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,y)$ μ-messbar ist, weil es der punktweise Grenzwert von einer Folge μ-messbarer Funktionen ist. Daher können wir den Satz von Lebesgue anwenden. Somit ist $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,y)$ μ-summierbar und

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)d\mu(x) &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k(x)d\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{\int_\Omega f(x,y+h_k)d\mu(x) - \int_\Omega f(x,y)d\mu(x)}{h_k} \\ &= \frac{d}{dy}\int_\Omega f(x,y)d\mu(x).\end{aligned}$$

$\square$

(b) Berechne das Integral

$$\phi(y) := \int_{(0,\infty)} e^{-x^2-y^2/x^2}d\mathcal{L}^1(x)$$

für alle $y > 0$.

Hinweis: Benutze Teil (a), um zu erhalten, dass ϕ das folgende Cauchy-Problem erfüllt:

$$\begin{cases}\phi'(y) = -2\phi(y) & \text{for } y > 0 \\ \lim_{y\to 0^+}\phi(y) = \sqrt{\pi}/2. & \end{cases}$$

Lösung: Bemerke zuerst, dass $e^{-x^2-y^2/x^2} \leq e^{-x^2}$ für alle $y > 0$ summierbar ist und $y \mapsto e^{-x^2-y^2/x^2}$ für alle $x > 0$ differenzierbar auf $(0,+\infty)$ ist. Ausserdem haben wir für alle $x, y > 0$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}e^{-x^2-y^2/x^2}\right| = \frac{2y}{x^2}e^{-x^2-y^2/x^2} \leq \frac{2e^{-x^2}}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2}e^{-y^2/x^2} \leq \frac{2e^{-x^2}}{y}e^{-1}.$$

Deshalb wird $\frac{\partial}{\partial y}e^{-x^2-y^2/x^2}$ von der $\mathcal{L}^1$-summierbaren Funktion e^{-x^2}/r für jedes $y > r$ abgeschätzt.

Jetzt können wir Teil (a) verwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}\phi'(y) &= -\int_{(0,\infty)} \frac{2y}{x^2} e^{-x^2-y^2/x^2} d\mathcal{L}^1(x) \overset{t=y/x}{=} -2\int_{(0,\infty)} y\frac{t^2}{y^2} e^{-t^2-y^2/t^2} \frac{y}{t^2} d\mathcal{L}^1(t) \\ &= -2\int_{(0,\infty)} e^{-t^2-y^2/t^2} d\mathcal{L}^1(t) = -2\phi(y).\end{aligned}$$

Der Wert von $\phi(0)$ ist das folgende bekannte Integral:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} d\mathcal{L}^1(x) = \sqrt{\pi}/2.$$

Deshalb erfüllt ϕ das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \phi'(y) = -2\phi(y) & \text{for } y > 0 \\ \lim_{y\to 0^+} \phi(y) = \sqrt{\pi}/2, \end{cases}$$

dessen Lösung $\phi(y) = \sqrt{\pi} e^{-y}/2$ ist. □

Aufgabe 11.6.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und $f, f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbare Funktionen.

(a) Zeige, dass der Satz von der dominierten Konvergenz aus dem Satz von Vitali folgt.

Lösung: Sei $g : \Omega \to [0,\infty]$ μ-summierbar und betrachte eine Folge $\{f_k\}$ von μ-messbaren Funktionen mit $f_k \to f$ punktweise μ-fast überall und $|f_k| \leq g$.

Da $\mu(\Omega) < +\infty$, erhalten wir die Konvergenz $f_k \xrightarrow{\mu} f$ aufgrund des Satzes 2.4.2 im Skript. Wir werden unten zeigen, dass das Integral von g absolut stetig ist (der Beweis aus der Vorlesung benutzte den Satz von der dominierten Konvergenz). Dies impliziert zusammen mit der Monotonie des Integrals, dass die f_k gleichmässig μ-summierbar sind.

Dadurch sind die Bedingungen im Satz von Vitali erfüllt, und es folgt, dass $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f| d\mu = 0$, was insbesondere die Gleichheit $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_k - f| d\mu = 0$ impliziert. □

Satz. Sei $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-summierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jede μ-messbare Menge $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \delta$, $\int_A |g| d\mu < \varepsilon$ gilt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $g \geq 0$ ist. Wir definieren dann $g_n = \min\{g, n\}$ und beobachten, dass $g_n \to g$ punktweise. Also haben wir $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega g d\mu$ nach dem Satz von Beppo Levi.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $\int_\Omega |g - g_N| d\mu < \varepsilon/2$. Setze $\delta := \varepsilon/(2N)$. Zum Schluss berechnen wir für $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \delta$:

$$\int_A |g| d\mu \leq \int_A |g - g_N| d\mu + \int_A |g_N| d\mu < \int_\Omega |g - g_N| d\mu + \mu(A)N < \varepsilon.$$

Dies zeigt die gleichmässige Stetigkeit des Integrals. □

(b) Seien $\Omega = [0,1]$ und $\mu = \mathcal{L}^1$. Gib ein Beispiel an, in dem der Satz von Vitali angewendet werden kann, aber der Satz von der dominierten Konvergenz nicht, d.h., eine dominierende

Funktion existiert nicht.
Hinweis: Betrachte die Funktionen $f_n^k(x) = \chi_{[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n})}(x)$.

Lösung: Sei $f_n^k(x) = \chi_{[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n})}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$. Die Folge $\{f_n^k\}$ ist gleichmässig summierbar: sei $\varepsilon > 0$ und wähle $M \in \mathbb{N}$ mit $1/M \geq \varepsilon$. Dann setze $\delta := 2^{-(M+1)}/M$ und beobachte für $A \subseteq [0,1]$ mit $\mu(A) \leq \delta$:

- Falls $n \geq M$ und $1 \leq k \leq n$, dann gilt

$$\int_A |f_n^k(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n^k(x)| dx \leq 2^{n+1} \cdot \frac{1}{n 2^{n+1}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{M} \leq \varepsilon;$$

- Falls $n < M$ und $1 \leq k \leq n$, dann gilt

$$\int_A |f_n^k(x)| dx \leq 2^{n+1} \delta = \frac{2^{n+1}}{M 2^{M+1}} < \frac{1}{M} \leq \varepsilon.$$

Weiterhin konvergiert $f_n^k \to 0$ punktweise gegen 0 und folglich auch nach Mass. Daher erfüllt (f_n^k) die Bedingungen vom Satz von Vitali. Trotzdem kann keine dominierende Funktion existiert, da sie grösser als $1/x$ wäre, was nicht summierbar auf $[0,1]$ ist. $\square$