Aufgabe 12.1.
Das Ziel dieser Übung ist das folgende Riemannsche Integral zu berechnen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

(a) Zeige, dass die Funktion $\Phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

wohldefiniert und überall differenzierbar ist.

Lösung: Die Endlichkeit ist klar, da $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$ ist. Für die Differenzierbarkeit: Sei $\{h_j\}$ eine gegen 0 konvergierende Folge. Wir wollen den Satz der dominierten Konvergenz anwenden, um den Grenzwert und das Integral in der folgenden Berechnung zu vertauschen:

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\frac{\Phi(t+h_j)-\Phi(t)}{h_j} &= \lim_{j\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-(t+h_j)x}-e^{-tx}}{h_j}\frac{\sin x}{x}\,dx\\ &= \int_0^\infty \lim_{j\to\infty}\frac{e^{-(t+h_j)x}-e^{-tx}}{h_j}\frac{\sin x}{x}\,dx\\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-tx}\right)\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty -e^{-tx}\sin x\,dx.\end{aligned}$$

Dafür reicht es aus, eine obere Schranke vom Integrand zu finden, die summierbar ist. Das wird leicht mithilfe der Standardabschätzung $|e^u - 1| \leq e^{|u|}|u|$, die aus dem Mittelwertsatz folgt. Dann gilt

$$\left|\frac{e^{-(t+h_j)x}-e^{-tx}}{h_j}\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{\left|e^{-h_jx}-1\right|}{|h_j|}e^{-tx}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{|h_j|x}xe^{-tx}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = e^{-tx/2}|\sin x| \in L^1(0,\infty)$$

wenn $|h_j| \leq t/2$, was für j gross genug gilt. Somit ist $\Phi(t)$ differenzierbar und dessen Ableitung ist:

$$\Phi'(t) = \int_0^\infty -e^{-tx}\sin x\,dx. \qquad \square$$

(b) Berechne $\Phi'(t)$ für $t \in (0,\infty)$.

Lösung: Wir benutzen partielle Integration zweimal im obigen Integralausdruck:

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx\\ &= \left[e^{-tx}\cos x\right]_0^\infty - \int_0^\infty -te^{-tx}\cos x\,dx\\ &= -1 + t\int_0^\infty e^{-tx}\cos x\,dx\\ &= -1 + \left[te^{-tx}\sin x\right]_0^\infty - \int_0^\infty -t^2e^{-tx}\sin x\,dx\\ &= -1 - t^2\Phi'(t).\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\Phi'(t) = -\frac{1}{1+t^2}. \qquad \square$$

(c) Berechne $\Phi(t)$ für $t \in (0, \infty)$.

Lösung: Zuerst zeigen wir, dass $\Phi(t) \to 0$ für $t \to \infty$ konvergiert: Dies folgt sofort aus Dominierter Konvergenz und der Ungleichung $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$. Der Fundamentalsatz von Analysis dann impliziert:

$$\Phi(t) = -\Big(\lim_{s\to\infty} \Phi(s) - \Phi(t)\Big) = -\int_t^\infty \Phi'(t) = \int_t^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(t).$$

$\square$

(d) Zeige, dass die Konvergenz

$$\int_0^a e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\, dx \xrightarrow{a\to\infty} \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\, dx$$

gleichmässig bezüglich $t > 0$ ist.

Hinweis: Dieser Teil ist technisch schwieriger. Es ist falsch, dass $\int_a^\infty \left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| dx$ gegen 0 gleichmässig konvergiert. Um die obige gleichmässige Konvergenz zu sehen, muss man die Aufhebungen des Integrals benutzen. Eine Möglichkeit ist zu sehen, dass die Summe

$$\sum_{k=m}^\infty \left| \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\, dx \right|$$

gegen 0 gleichmässig bezüglich $t > 0$ wenn $m \to \infty$ konvergiert.

Lösung: Sei $a > 0$ und wähle $m \in \mathbb{N}$, sodass $2\pi(m-1) < a \leq 2\pi m$ gilt. Dann haben wir:

$$\left|\int_a^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leq \int_a^{2\pi m} \left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| dx + \sum_{k=m}^\infty \left|\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{-tx}\frac{\sin x}{x} dx\right|.$$

Für den ersten Term gilt:

$$\int_a^{2\pi m} \left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| dx \leq \frac{2\pi m - a}{a} \leq \frac{2\pi}{a}.$$

Für die anderen Terme teilen wir jedes Integral in zwei und benutzen eine Substitution:

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{-tx}\frac{\sin x}{x} &= \int_0^\pi e^{-t(2k\pi+x)}\frac{\sin(2k\pi+x)}{2k\pi+x}dx + \int_0^\pi e^{-t((2k+1)\pi+x)}\frac{\sin((2k+1)\pi+x)}{(2k+1)\pi+x}dx \\
&= \int_0^\pi \sin x \frac{e^{-t(2k\pi+x)}}{2k\pi+x}dx - \int_0^\pi \sin x \frac{e^{-t((2k+1)\pi+x)}}{(2k+1)\pi+x}dx \\
&= \int_0^\pi \sin x \left(\frac{e^{-t(2k\pi+x)}}{2k\pi+x} - \frac{e^{-t((2k+1)\pi+x)}}{(2k+1)\pi+x}\right) dx \\
&\leq \pi \left(\frac{e^{-t(2k\pi)}}{2k\pi} - \frac{e^{-t(2(k+1)\pi)}}{2(k+1)\pi}\right).
\end{aligned}$$

Dies ist eine Teleskopsumme, also:

$$\left|\int_a^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2\pi}{a} + \pi\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{e^{-t(2k\pi)}}{2k\pi} - \frac{e^{-t(2(k+1)\pi)}}{2(k+1)\pi}\right) \le \frac{2\pi}{a} + \pi\frac{e^{-t(2m\pi)}}{2m\pi} \le \frac{2\pi}{a} + \frac{\pi}{a},$$

was gegen 0 gleichmässig in t für $a \to \infty$ konvergiert.

(e) Folgere den Wert des Integrals daraus:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Aus gleichmässiger Konvergenz folgt es, dass es ein a_0 gibt, sodass für $a \ge a_0$ und jedes $t > 0$ das Folgende gilt:

$$\left|\int_0^a e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

Fixiere nun $a \ge a_0$ und sei $t > 0$ klein genug, sodass $a(1-e^{-ta}) \le \varepsilon/3$ und $\arctan t \le \varepsilon/3$ gelten. Die erste Bedingung impliziert:

$$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^a e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \int_0^a (1-e^{-tx})\frac{|\sin x|}{x}\,dx \le a(1-e^{-ta}) \le \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

während die Zweite ergibt:

$$\left|\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{\pi}{2} - \Phi(t)\right| = \arctan t \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Zum Schluss verbinden wir (2), (1) und (3) und erhalten für $a \ge a_0$:

$$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}\right| \le \varepsilon.$$

Somit ist der Wert des uneigentlichen Integrals $\pi/2$. □

Aufgabe 12.2.

Sei $1 \le p < \infty$, und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eine gleichmässig stetige Funktion. Zeige:

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0.$$

Lösung: Nehme an, dass ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $\{x_k\}$ existieren, die $|x_k| \to \infty$ und $|\varphi(x_k)| \ge \varepsilon$ erfüllen. Es folgt aus der gleichmässigen Stetigkeit, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jedes $x \in B_\delta(x_k)$ $|\varphi(x) - \varphi(x_k)| \le \varepsilon/2$ ist, und insbesondere $|\varphi(x)| \ge \varepsilon/2$.

Da $|x_k| \to \infty$ strebt, können wir eine Teilfolge $\{x_{k_j}\}$ mit $|x_{k_j}| > |x_{k_{j-1}}| + 2\delta$ nehmen. Die Kugeln $B_\delta(x_{k_j})$ sind dann disjunkt, und dies ermöglicht uns zu berechnen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p\,dx \ge \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B_\delta(x_{k_j})} |\varphi(x)|^p\,dx \ge \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B_\delta(x_{k_j})} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p dx = +\infty$$

Das steht aber im Widerspruch damit, dass f zu $L^p(\mathbb{R}^n)$ gehört. $\square$

Aufgabe 12.3.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge.

(a) (Verallgemeinerung – Höldersche Ungleichung) Betrachte $1 \leq p_1, \ldots, p_k \leq \infty$, so dass $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \leq 1$. Für Funktionen $f_i \in L^{p_i}(\Omega, \mu)$ mit $i = 1, \ldots, k$, zeige, dass $\prod_{i=1}^k f_i \in L^r(\Omega, \mu)$ und

$$\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_{L^r} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

Lösung: Wir können annehmen, dass alle p_i endlich sind, denn unendliche Exponenten können direkt behandelt werden. Wir beweisen die Aussage durch Induktion. Für $k = 1$ gibt es nichts zu beweisen. Für den Induktionsschritt $k-1 \to k$ wissen wir, dass $\frac{1}{r} - \frac{1}{p_k} = \frac{p_k - r}{p_k r} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{p_j}$ ist. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt es, dass $\prod_{j=1}^{k-1} f_j \in L^{\frac{p_k r}{p_k - r}}(\Omega, \mu)$ gilt, sowohl als die Abschätzung:

$$\left\| \prod_{j=1}^{k-1} f_j \right\|_{L^{\frac{p_k r}{p_k - r}}} \leq \prod_{j=1}^{k-1} \|f_j\|_{L^{p_j}}.$$

Wir können jetzt die Höldersche Ungleichung zu den Funktionen $g_1 = \prod_{j=1}^{k-1} |f_j|^r$ und $g_2 = |f_k|^r$ mit den Exponenten $\frac{p_k}{p_k - r}$ und $\frac{p_k}{r}$ anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\prod_{j=1}^k |f_k| \right)^r &\leq \left(\int_\Omega \prod_{j=1}^{k-1} |f_j|^{r \frac{p_k}{p_k - r}} \right)^{\frac{p_k - r}{p_k}} \left(\int_\Omega |f_k|^{r \frac{p_k}{r}} \right)^{\frac{r}{p_k}} \\
&= \left\| \prod_{j=1}^{k-1} f_j \right\|_{L^{\frac{p_k r}{p_k - r}}}^r \|f_k\|_{L^{p_k}}^r \leq \prod_{j=1}^{k-1} \|f_j\|_{L^{p_j}}^r \cdot \|f_k\|_{L^{p_k}}^r.
\end{aligned}$$

Das ergibt $\| \prod_{i=1}^k f_i \|_{L^r} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}$, wie wir zeigen wollten. $\square$

(b) Falls $\mu(\Omega) < +\infty$, zeige, dass $L^s(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$ für alle $1 \leq r < s \leq +\infty$.

Lösung: Seien $1 \leq r < s \leq +\infty$ und definiere $p = rs/(s - r)$, sodass $\frac{1}{s} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$ gilt. Falls $\mu(\Omega) < +\infty$, dann ist $g = 1 \in L^p(\Omega, \mu)$. Deshalb können wir Teil (a) anwenden und sehen, dass für alle $f \in L^r(\Omega, \mu)$, $f = f \cdot 1 \in L^r(\Omega, \mu)$, was die gewünschte Inklusion beweist. $\square$

(c) Beweise, dass $L^s(\Omega, \mu)$ eine echte Teilmenge von $L^r(\Omega, \mu)$ für alle $1 \leq r < s \leq +\infty$. d.h., in Teil (b) haben wir keine Gleichheit.

Lösung: Sei $1 \leq r < +\infty$ und betrachte die Funktion $f\colon (0, 1/2) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\log^2\left(\frac{1}{x}\right) x^{1/r} \right)^{-1}.$$

Beachte, dass f in L^r ist, wegen der folgenden Berechnung:

$$\int_0^{1/2} \left(\log^2\left(\frac{1}{x}\right) x^{1/r}\right)^{-r} dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1/2} \left(\log^{2r}\left(\frac{1}{x}\right) x\right)^{-1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{(2r-1)\log^{2r-1}(1/x)}\right]_\varepsilon^{1/2} = \frac{1}{(2r-1)\log^{2r-1}(2)}.$$

Andererseits ist $f \notin L^s$ für alle $s > r$: In diesem Fall kann man $0 < t < \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$ wählen, und dann $\log^2\left(\frac{1}{x}\right) \le Cx^{-t}$ mit einer Konstante $C > 0$ abschätzen. Daher gilt

$$\left(\log^2\left(\frac{1}{x}\right) x^{1/r}\right)^{-1} \ge \frac{1}{C} x^{t-\frac{1}{r}}$$

mit $s(t - \frac{1}{r}) < -1$, was nicht integrierbar ist. □

Aufgabe 12.4.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < +\infty$. Betrachte eine Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, so dass $fg \in L^1(\Omega,\mu)$ für alle $g \in L^p(\Omega,\mu)$. Zeige, dass $f \in L^q(\Omega,\mu)$ für alle $q \in [1, p')$, wobei $p' = \frac{p}{p-1}$ der zu p konjugierte Exponent ist.

Lösung: Setze zuerst $g = 1 \in L^p(\Omega,\mu)$. Dann folgt, dass $f \in L^1(\Omega,\mu)$ ist. Als nächstes nehmen wir $g = |f|^{1/p} \in L^p(\Omega,\mu)$ und erhalten $|f|^{1+1/p} \in L^1$. Dann können wir auch $g = |f|^{1/p+1/p^2} \in L^p(\Omega,\mu)$ setzen, was $|f|^{1+1/p+1/p^2} \in L^1(\Omega,\mu)$ ergibt.

Mithilfe von Induktion können wir sehen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $|f|^{p_n} \in L^1(\Omega,\mu)$ ist, wobei $p_n = 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^n} = \frac{1-1/p^{n+1}}{1-1/p}$ ist. Insbesondere gilt $f \in L^{p_n}(\Omega,\mu)$ und daher dank der Aufgabe 12.3 (b) auch $f \in L^q(\Omega,\mu)$ für jedes q kleiner als ein p_n. Da $p_n \to p'$ für $n \to \infty$, gilt es für beliebiges $q < p'$. □

Aufgabe 12.5.
Seien μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge.

(a) Zeige, dass jede Funktion $f \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} L^p(\Omega,\mu)$ mit $\sup_{p\in\mathbb{N}^*} \|f\|_{L^p} < +\infty$ in $L^\infty(\Omega,\mu)$ enthalten ist.

Hinweis: Benutze die Tschebyscheff-Ungleichung.

Lösung: Sei $C = \sup_{p\in\mathbb{N}^*}\|f\|_{L^p}$ und $\varepsilon > 0$. Dank der Tschebyscheff-Ungleichung haben wir:

$$\mu(\{|f| \ge C+\varepsilon\}) = \mu(\{|f|^p \ge (C+\varepsilon)^p\}) \le \frac{1}{(C+\varepsilon)^p}\int_\Omega |f|^p d\mu$$
$$\le \left(\frac{C}{C+\varepsilon}\right)^p \to 0 \quad \text{für } p \to \infty.$$

Deshalb ist $\mu(\{|f| \ge C+\varepsilon) = 0$ und $f \in L^\infty$ folgt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war,

$$\mu(\{|f| > C\}) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{|f| \ge C + 1/n\}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{|f| \ge C+1/n\}) = 0$$

impliziert $\|f\|_{L^\infty} \le C$. □

(b) Falls $\mu(\Omega) < +\infty$, zeige, dass für alle f wie in Teil (a) $\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$ gilt.

Lösung: Nimm eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $\lim_{k\to\infty}\|f\|_{L^{p_k}} = \liminf_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}$, und sei $\varepsilon > 0$. Nimm auch k_0, sodass $\|f\|_{L^{p_k}} \leq \liminf_{p\to\infty}\|f\|_{L^p} + \varepsilon$ für $k \geq k_0$.
Als im Teil (a) folgt es, dass $\|f\|_{L^\infty} \leq \liminf_{p\to\infty}\|f\|_{L^p} + \varepsilon$ ist, und wenn wir $\varepsilon \downarrow 0$ lassen, erhalten wir die Ungleichung $\|f\|_{L^\infty} \leq \liminf_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}$.
Für die umgekehrte Ungleichung, sei jetzt $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty}\|f\|_{L^{p_k}} = \limsup_{p\to\infty}\|f\|_{L^p}$. Für $q > p$ gilt $\|f\|_{L^q}^q \leq \|f\|_{L^p}^p \|f\|_{L^\infty}^{q-p}$. Sei $p > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $p_k > p$ für $k \geq k_0$ gilt. Dann folgt:

$$\|f\|_{L^{p_k}} \leq \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_k}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{p_k}} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \cdot \|f\|_{L^\infty}.$$

Deshalb ist $\limsup_{p\to\infty}\|f\|_{L^p} = \lim_{k\to\infty}\|f\|_{L^{p_k}} \leq \|f\|_{L^\infty}$ und beide Ungleichungen sind bewiesen.

(c) Finde eine Funktion $f \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} L^p(\Omega,\mu)$, wobei $\mu(\Omega) < +\infty$, so dass $f \notin L^\infty(\Omega,\mu)$, d.h., zeige, dass das Ergebnis von Teil (a) ohne die Annahme $\sup_{p\in\mathbb{N}} \|f\|_{L^p} < +\infty$ nicht zutrifft.

Lösung: Für $f(x) = -\log(x)$ ist es klar, dass $f \in L^p((0,1),\mathcal{L}^1)$ ist aber $f \notin L^\infty$. $\square$

Aufgabe 12.6.

Sei $(x_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset [0,+\infty]$ eine Folge von $\mathbb{N}^2$ indiziert. Zeige, dass:

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty x_{n,m} = \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty x_{n,m}.$$

Bemerkung. Für eine Folge $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset [0,+\infty]$ mit einer beliebigen Indexmenge A, definieren wir

$$\sum_{\alpha\in A} x_\alpha := \sup_{F\,\subset\,A \text{ endlich}} \sum_{\alpha\in F} x_\alpha.$$

Lösung: Wir zeigen nur die Gleichung $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty x_{n,m}$; die andere Gleichung wird analog bewiesen. Sei $F \subset \mathbb{N}^2$ eine endliche Menge. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass F in $\{0,1,\dots,N\} \times \{0,1,\dots,N\}$ enthalten ist. Daher ist

$$\sum_{(n,m)\in F} x_{n,m} \leq \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N x_{n,m} \leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty x_{n,m}.$$

Nimmt man das Supremum über alle $F \subset \mathbb{N}^2$, so erhält man $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m} \leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty x_{n,m}$. Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, reicht es aus zu zeigen, dass $\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^\infty x_{n,m} \leq \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Dies ist aber eine direkte Berechnung:

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^\infty x_{n,m} = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M x_{n,m} = \lim_{M\to\infty} \sum_{(n,m)\in\{0,\dots,N\}\times\{0,\dots,M\}} x_{n,m} \leq \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m}, \qquad \square$$