

Axiomatische Mengenlehre

Serie 0

Kardinalzahlcharakteristiken

Besprechung am 28. September

Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der Teilmengen von \mathbb{N} , und sei $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ die Menge der *unendlichen* Teilmengen von \mathbb{N} .

Eine Menge A heisst *abzählbar*, falls eine Surjektion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ existiert. Ist eine Menge nicht abzählbar, so heisst sie *überabzählbar*.

Eine Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ hat die *Kardinalität* \mathfrak{c} , falls eine Injektion $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathcal{C}$ existiert.

0. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ ist eine *reaping family* falls gilt:

$$\forall x \subseteq \mathbb{N} \exists y \in \mathcal{F} (y \cap x = \emptyset \vee y \subseteq x)$$

Zeige: Jede reaping family $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

1. Für Funktionen g, f von \mathbb{N} nach \mathbb{N} definieren wir:

$$g <^* f : \iff \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k (g(n) < f(n))$$

Gilt $g <^* f$, so sagen wir, dass f die Funktion g *dominiert*. Eine Familie \mathcal{F} von Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} heisst *dominierend*, falls für jede Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein $f \in \mathcal{F}$ existiert mit $g <^* f$. Eine Familie \mathcal{F} von Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} heisst *unbeschränkt*, falls es keine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, welche alle Funktionen aus \mathcal{F} dominiert.

- (a) Zeige: Jede dominierende Familie von Funktionen ist unbeschränkt.
(b) Zeige: Jede unbeschränkte Familie von Funktionen ist überabzählbar.

- 2.* Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ heisst *fast disjunkt* falls gilt:

$$\forall x \in \mathcal{A} \forall y \in \mathcal{A} (x \neq y \rightarrow (x \cap y) \text{ ist endlich})$$

- (a) Konstruiere eine fast disjunkte Familie $\mathcal{A}_{\mathfrak{c}} \subseteq \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ der Kardinalität \mathfrak{c} .
(b) Konstruiere eine unendliche Menge $x_0 \subseteq \mathbb{N}$, welche mit jeder Menge $y \in \mathcal{A}_{\mathfrak{c}}$ einen endlichen Durchschnitt hat (*d.h.* die Familie $\mathcal{A}_{\mathfrak{c}}$ ist nicht maximal).